
Stanford University Libraries
3 6105 000 993 340



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung der Herren

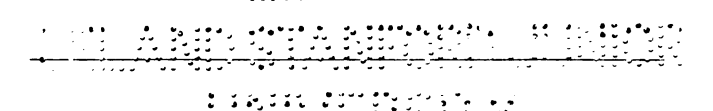
Weierstrass und **von Helmholtz**

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.



Band 112.

In vier Heften.

Berlin, 1893.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 112.

Berichtigung.

In der Abhandlung von *P. Stäckel:* „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“, Heft 3 dieses Bandes, muss es Seite 262, Zeile 6 von oben

$$z + z^a + z^{a^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{a^n}$$

statt

$$1 + z^a + z^{a^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{a^n}$$

heissen.

Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie.

(Von Herrn *K. Th. Vahlen.*)

Aus der von *Euler* in dem Kapitel „De partitione numerorum" seiner „Introductio in analysin infinitorum" aufgestellten Formel:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots = \sum_k (-1)^k x^{\frac{3k^2-k}{2}} \qquad (k=-\infty, \ldots, +\infty)$$

hatte schon *Legendre* (Théorie des nombres Bd. II) durch Coefficientenvergleichung den Satz gefolgert:

Jede Zahl, welche nicht die Form $\frac{3k^2-k}{2}$ hat, d. h. jede nicht fünfeckige Zahl lässt sich ebenso oft in eine gerade wie in eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden zerlegen; jede fünfeckige Zahl $\frac{3k^2-k}{2}$ besitzt eine Zerlegung in eine gerade Anzahl von Summanden mehr oder weniger als Zerlegungen in eine ungerade Anzahl, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Den ersten arithmetischen Beweis dieses Satzes gab *Jacobi* in der Abhandlung „Beweis des Satzes u. s. w." (Werke, Bd. VI pag. 303—314). Einen äusserst einfachen Beweis desselben Satzes fand *J. Franklin* 1881 (Comptes rendus Bd. 92 pag. 448, Sur le développement du produit infini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$), eine Mittheilung, die ich Herrn Prof. Dr. *Frobenius* verdanke. Denselben Beweis hatte ich im November 1892 gefunden und am 8. November 1892 Herrn Prof. Dr. *Hensel* brieflich mitgetheilt. Bald darauf, nämlich Anfang December 1892, erschien eine Abhandlung von Herrn Dr. *Ludwig Goldschmidt* („Ueber den Satz *Eulers*:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = \sum_0^\infty (-1)^n x^{\frac{3n^2\pm n}{2}}\text{"}$$

Programm-Abhandlung der höheren Handelsschule zu Gotha 1892), welche ebenfalls denselben Beweis enthält. Auf die Wiedergabe dieses Beweises kann ich um so mehr verzichten, als sich der Satz aus einem später zu

beweisenden allgemeineren Satze als unmittelbare Folgerung ergeben wird. Bemerkt sei nur noch, dass die in der genannten *Jacobi*schen Abhandlung enthaltenen scheinbar allgemeineren Sätze sich leicht aus dem besonderen erschliessen lassen.

Diesem besonderen Satze und seinen Anwendungen ist der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit gewidmet. Der zweite Abschnitt enthält den erwähnten allgemeineren Satz nebst einigen unmittelbaren Anwendungen; während daran anschliessend im dritten und vierten Abschnitt die Zerlegung der Zahlen in zwei und in vier Quadrate behandelt wird.

I.

Wir haben es im Folgenden nur mit ganzen, und, wenn nichts anderes gesagt ist, mit nicht negativen ganzen Zahlen zu thun. Die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl s in der Form $a_1+a_2+\cdots+a_n$ bezeichnen wir mit $N(s=a_1+a_2+\cdots+a_n)$, und verwenden das Symbol N stets zur Bezeichnung einer Anzahl von Zerlegungen; die Art der jedesmaligen Zerlegungen wird durch das Argument von N angedeutet. Dann erhellt ohne weiteres die Richtigkeit der Gleichungen:

$$(1.)\qquad \underset{0<a_1<a_2\cdots<a_n}{N(s=a_1+a_2+\cdots+a_n)} = \underset{0\leqq a_1'<a_2'\cdots<a_n'}{N(s-n=a_1'+a_2'+\cdots+a_n')},$$

$$(2.)\qquad \underset{0<a_1<a_2\cdots<a_n}{N(s=a_1+a_2+\cdots+a_n)} = \underset{0<a_1'\leqq a_2'\cdots\leqq a_n'}{N\left(s-\frac{n(n-1)}{2}=a_1'+a_2'+\cdots+a_n'\right)},$$

$$(3.)\qquad \underset{0<a_1<a_2\cdots<a_n}{N(s=a_1+a_2+\cdots+a_n)} = \underset{0\leqq a_1'\leqq a_2'\cdots\leqq a_n'}{N\left(s-\frac{n(n+1)}{2}=a_1'+a_2'+\cdots+a_n'\right)},$$

$$(4.)\qquad \underset{a_i>0,\ i=1,2,\ldots,n}{N(s=1a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n)} = \underset{a_i'\geqq 0,\ i=1,\ldots,n}{N\left(s-\frac{n(n+1)}{2}=1a_1'+2a_2'+\cdots+na_n'\right)},$$

$$(5.)\qquad \underset{a_1>a_2\cdots>a_n>0}{N(s=a_1+a_2+\cdots+a_n)} = \underset{a_i'\geqq 0}{N\left(s-\frac{n(n+1)}{2}=1a_1'+2a_2'+\cdots+na_n'\right)},$$

$$(6.)\qquad \underset{a_1>a_2\cdots>a_n>0}{N(s=a_1+a_2+\cdots+a_n)} = \underset{a_i'>0}{N(s=1a_1'+2a_2'+\cdots+na_n')},$$

$$(7.)\qquad \underset{a_1\geqq a_2\geqq a_3\cdots\geqq a_n\geqq 0}{N(s=a_1+a_2+\cdots+a_n)} = \underset{a_i'\geqq 0}{N(s=1a_1'+2a_2'+\cdots+na_n')},$$

wenn man in ihnen der Reihe nach:

$$a_i' = a_i - 1,\quad a_i' = a_i - i + 1,\quad a_i' = a_i - i,\quad a_i' = a_i - 1,$$
$$a_i' = a_i - a_{i+1} - 1,\quad a_i' = a_i - a_{i+1},\quad a_i' = a_i - a_{i+1}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ setzt $(a_{n+1} = 0)$. Die letzte besagt z. B., dass sich jede Zahl in n beliebige Theile eben so oft zerlegen, wie aus den n ersten Zahlen, jede beliebig oft genommen, zusammensetzen lässt.

Durch die vorstehenden Sätze wird die Bestimmung der Anzahl für verschiedene Arten von Zerlegungen zurückgeführt auf die Bestimmung der Anzahl $N(s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, $0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n$; für diese liefert Satz (1.) die Recursionsformel:

$$(8.)\quad \begin{cases} N(s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = N(s - n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ \qquad\qquad + N(s - n = a_1 + \cdots + a_{n-1}). \end{cases}$$

Betrachten wir nunmehr die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl s in beliebig viele verschiedene Zahlen; wir bezeichnen dieselbe mit

$$N(s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots).$$
$$0 < a_1 < a_2 < a_3 \cdots$$

Indem wir in jeder Zerlegung alle diejenigen Summanden a zusammenfassen, deren grösster ungerader Factor u_i derselbe ist, geht die Zerlegung

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

über in $s = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + \cdots$, in welcher die Coefficienten k sich als Summen verschiedener Potenzen von 2 ergeben; da sich umgekehrt jede Zahl k eindeutig als Summe verschiedener Potenzen von 2 darstellen lässt, so entsprechen je zwei Zerlegungen

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \text{und} \quad s = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + \cdots$$

sich eindeutig, also ist:

$$(9.)\quad N(s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) = N(s = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + \cdots),$$
$$0 < a_1 < a_2 < a_3 \cdots \qquad\qquad 0 < u_1 < u_2 < u_3 \cdots$$

d. h. jede Zahl lässt sich eben so oft als Summe von lauter verschiedenen Zahlen darstellen, wie als Summe von ungeraden Zahlen, jede beliebig oft genommen.

Die Herleitung der Sätze (2.), (5.), (7.), (8.), (9.) aus der Vergleichung unendlicher Producte bildet den Hauptinhalt des Kapitels „De partitione numerorum“ in *Eulers* „Introductio in analysin infinitorum“. Namentlich

ergiebt sich der Satz (9.) aus der Gleichung:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots}.$$

Eine Summe von λ verschiedenen Summanden bezeichnen wir mit $\sum\limits_1^\lambda a_i$; darf aber jeder Summand beliebig oft vorkommen, so bezeichnen wir die Summe mit $\sum\limits_1^\lambda k_i a_i$; kommt es auf die Anzahl λ der Summanden nicht an, so schreiben wir einfach Σa_i und $\Sigma k_i a_i$. Gerade Zahlen werden mit g, ungerade mit u, die Pentagonalzahlen $\frac{3k^2-k}{2}$ mit ϖ_k bezeichnet. Mit Ausdrücken wie z. B. $N\left(s = \sum\limits_1^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda\right)$ bezeichnen wir die Anzahl der Zerlegungen $s = \sum\limits_1^\lambda a_i$, jede $(-1)^\lambda$-mal gezählt. Betrachten wir die Anzahldifferenz $N\left(s = \sum\limits_1^\lambda a_i + \Sigma k_i a'_i;\ (-1)^\lambda\right)$. Es seien $a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \ldots, a_\nu$ diejenigen Summanden a'_i der zweiten Summe $\Sigma k_i a'_i$, welche in der ersten $\sum\limits_1^\lambda a_i$ nicht vorkommen. Die 2^ν Zerlegungen, die wir aus der einen $s = \sum\limits_1^\lambda a_i + \Sigma k_i a'_i$ ableiten, indem wir der Reihe nach alle ν, je $\nu-1$, je $\nu-2, \ldots,$ je 1, schliesslich keinen der Summanden $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ in die erste Summe nehmen, während in der zweiten Summe $\Sigma k_i a'_i$ nur die betreffenden Coefficienten k_i um eine Einheit geändert werden, diese 2^ν Zerlegungen liefern zu unserer Anzahldifferenz den Beitrag

$$(-1)^\nu + \binom{\nu}{1}(-1)^{\nu-1} + \binom{\nu}{2}(-1)^{\nu-2} + \cdots + 1 \quad \text{d. h. Null.}$$

Da wir alle Zerlegungen der betrachteten Art in dieser Weise zu Gruppen zusammenfassen können, so ergiebt sich

$$N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + \Sigma k_i a'_i;\ (-1)^\lambda\right) = 0. \tag{10.}$$

Ebenso ist:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda u_i + \Sigma k_i u'_i;\ (-1)^\lambda\right) = 0. \tag{11.}$$

Durch Anwendung des Satzes (9.) ergiebt sich aus (11.):

$$N\left(s = \sum_1^\lambda u_i + \Sigma a_i;\ (-1)^\lambda\right) = 0. \tag{12.}$$

Aehnlich findet man:

$$(13.)\quad N(s = \Sigma a_i + \Sigma k_i a'_i;\ (-1)^{\Sigma k_i}) = 0,$$

$$(14.)\quad N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + \Sigma a'_i;\ (-1)^\lambda\right) = N\left(s = 2\sum_1^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda\right),$$

$$(15.)\quad N\left(s = \sum_1^{\lambda'} a'_{i'} + \sum_1^{\lambda''} a''_{i''};\ (-1)^{\frac{\lambda'-\lambda''}{2}}\right) = 0, \qquad (a'_{i'} \gtrless a''_{i''})$$

$$(16.)\quad N\left(s = \sum_1^{\lambda'} a'_{i'} + \sum_1^{\lambda''} a''_{i''};\ (-1)^{\frac{\lambda'-\lambda''}{2}}\right) = N(s = 2\Sigma a_i); \qquad \left(a'_{i'} \gtreqless a''_{i''}\right)$$

während sich die Gleichung:

$$(17.)\quad N\left(s = \sum_1^{\lambda'} g_i + \Sigma u_i;\ (-1)^{\lambda'}\right) = (-1)^s . N\left(s = \sum_1^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda\right),$$

durch Trennung von Σa_i in $\Sigma g_i + \Sigma u_i$ ergiebt.

Wenden wir auf die Anzahldifferenz:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda u_i + \Sigma a_i + \Sigma k_i a'_i;\ (-1)^{\lambda + \Sigma k_i}\right)$$

den Satz (12.) an, so ergiebt sich:

$$N(s = \Sigma k_i a'_i;\ (-1)^{\Sigma k_i});$$

wenden wir aber den Satz (13.) an, so wird dieselbe Anzahldifferenz gleich

$$N\left(s = \sum_1^\lambda u_i;\ (-1)^\lambda\right) \text{ d. h. gleich } (-1)^s . N(s = \Sigma u_i);$$

also ist:

$$(18.)\quad N(s = \Sigma u_i) = (-1)^s . N(s = \Sigma k_i a_i;\ (-1)^{\Sigma k_i}),$$

d. h. jede Zahl lässt sich eben so oft in verschiedene ungerade Zahlen zerlegen, als die Anzahldifferenz ihrer geraden und ungeraden Zerlegungen in beliebige, beliebig oft genommene Summanden angiebt.

Durch Einführung von drei zahlentheoretischen Functionen $\varrho(s)$, $\sigma(s)$, $\tau(s)$ können wir jetzt folgende Gleichungen aufstellen:

$$(19.)\quad \begin{cases} N(s = \Sigma k_i u_i) = \varrho(s), \\ N(s = \Sigma k_i u_i;\ (-1)^{\Sigma k_i}) = (-1)^s \varrho(s), \end{cases}$$

$$(20.)\quad \begin{cases} N(s = \Sigma u_i) = \tau(s), \\ N\left(s = \sum_1^\lambda u_i;\ (-1)^\lambda\right) = (-1)^s \tau(s), \end{cases}$$

$$(21.)\quad N(s = \Sigma k_i a_i) = \sigma(s),$$

$$(22.)\quad N(s = \Sigma k_i a_i;\ (-1)^{\Sigma k_i}) = (-1)^s \tau(s),$$

(23.) $$N(s = \Sigma a_i) = \varrho(s),$$

(24.) $$N\left(s = \sum_1^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda\right) = N(s = \varpi_k;\ (-1)^k);$$

deren letzte der Ausdruck des in der Einleitung genannten ***Euler-Legendre***schen Satzes ist.

Durch Anwendung desselben auf die Gleichungen (10.), (14.), (17.) erhalten wir die Recursionsformeln

(25.) $$\sum_k (-1)^k \sigma(s-\varpi_k) = 0,$$

(26.) $$\sum_k (-1)^k \varrho(s-\varpi_k) = N(s = 2\varpi_h;\ (-1)^h),$$

(27.) $$\sum_k (-1)^k \tau(s-2\varpi_k) = N(s = \varpi_h;\ (-1)^{s+h}),$$

in denen, wie im Folgenden stets, die Summation sich auf alle Glieder mit nicht negativen Argumenten bezieht. Dabei ist $\sigma(0) = \varrho(0) = \tau(0) = 1$ zu setzen. In ähnlicher Weise lassen sich zahlreiche andere Formeln herleiten; z. B. folgt aus (12.) oder (13.):

(28.) $$\sum_k (-1)^k \tau(k).\varrho(s-k) = 0.$$

Ist $f(s)$ eine beliebige zahlentheoretische Function, n eine gegebene Zahl, und setzen wir:

$$\sum_k (-1)^k f(s-n\varpi_k) = F(s),$$

für jede ganze Zahl s, so wird $\sum_h F(s-nh)\sigma(h)$ gleich:

$$\sum_{k,h} (-1)^k f(s-n(h+\varpi_k)).\sigma(h) = \sum_{k,h'} (-1)^k f(s-nh').\sigma(h'-\varpi_k),$$

also, nach Anwendung der Recursionsformel (25.) für die Function $\sigma(s)$:

$$\sum_h F(s-nh)\sigma(h) = f(s).$$

Da auch umgekehrt aus dieser Gleichung die erste folgt, können wir den Satz aussprechen:

Von den beiden Gleichungen

(29.) $$\begin{cases} \sum_k (-1)^k f(s-n\varpi_k) = F(s), \\ \sum_h F(s-nh).\sigma(h) = f(s) \end{cases}$$

ist jede eine Folge der anderen.

Durch Anwendung dieses Satzes auf (26.) und (27.) erhalten wir:

$$\text{(30.)} \qquad \varrho(s) = \sum_k (-1)^k . \sigma(s-2\varpi_k),$$

$$\text{(31.)} \qquad (-1)^s \tau(s) = \sum_k (-1)^k . \sigma\left(\frac{s-\varpi_k}{2}\right).$$

Durch nochmalige Anwendung von (29.):

$$\text{(32.)} \qquad \sigma(s) = \sum_k \varrho(s-2k)\sigma(k),$$

$$\text{(33.)} \qquad \sigma\left(\frac{s}{2}\right) = \sum_h (-1)^{s-h} \tau(s-h)\sigma(h),$$

wie wir auch direct hätten finden können. (Unsere Functionen verschwinden für gebrochene Argumente.)

Jetzt setzen wir:

$$S_d(s) = \sum_{dd'=s} d,$$

$$S_g(s) = \sum_{gd'=s} g,$$

$$S_u(s) = \sum_{ud'=s} u,$$

$$S'_g(s) = \sum_{dg=s} d,$$

$$S'_u(s) = \sum_{du=s} d,$$

so dass S_d die Summe aller Divisoren, S_g die Summe der geraden, S_u die Summe der ungeraden, S'_g die Summe der den geraden Divisoren complementären, S'_u die Summe der den ungeraden Divisoren complementären Divisoren von s bezeichnet. Endlich setzen wir noch:

$$\text{(34.)} \qquad S_u(s) - S_g(s) = -\sum_{dd'=s} (-1)^d d = D(s).$$

Dagegen wird:

$$S'_u(s) - S'_g(s) = -\sum_{dd'=s} (-1)^{d'} d$$

keine neue Function; denn, ist $s = 2^a . u$ und sind u_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ alle Divisoren von u, so wird:

$$-\Sigma(-1)^{d'} d = \underset{(i=1,2,3,\ldots)}{\Sigma 2^a u_i} - \underset{(i=1,2,3,\ldots,\ h=0,1,\ldots,a-1)}{\Sigma 2^h u_i} = \Sigma u_i,$$

d. h.

$$\text{(35.)} \qquad S'_u(s) - S'_g(s) = S_u(s).$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit den evidenten:

$$S'_u(s) + S'_g(s) = S_d(s),$$

$$S_u(s) + S_g(s) = S_d(s)$$

folgt:

$$(36.)\qquad 2S'_u(s) = S_d(s)+S_u(s) = 2S_u(s)+S_g(s),$$

$$(37.)\qquad 2S'_g(s) = S_d(s)-S_u(s) = S_g(s);$$

da ausserdem $S_g(s) = 2S_d\left(\frac{s}{2}\right)$ ist, kommen nur die Functionen S_d, S_u, S'_u, D in Betracht.

Zerlegen wir jetzt die Zahl s auf alle Arten in die Form $\Sigma k_i a_i + n$, zerlegen überdies den Summanden n auf alle möglichen Weisen in zwei Factoren $n = k.a_0$; zählen wir jede solche Zerlegung $s = \Sigma k_i a_i + k a_0$ a_0-mal, so wird die Anzahl aller Zerlegungen, die wir mit $N(s = \Sigma k_i a_i + k a_0;\ a_0)$ bezeichnen, gleich $\sum_{n=1}^{s} S_d(n)\sigma(s-n)$. Dieselbe Anzahl können wir in anderer Weise ermitteln. Ist nämlich $k_0 - k$ der Coefficient von a_0 in der Summe $\Sigma k_i a_i$, so ergeben die k_0 Zerlegungen:

$$(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots) + k_0 a_0$$

$$(1.a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots) + (k_0 - 1) a_0,$$

$$(2.a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots) + (k_0 - 2) a_0,$$

u. s. w.,

$$((k_0-1)a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots) + 1.a_0$$

zu unserer Anzahl den Beitrag $k_0 a_0$. Die Anzahl ist also dieselbe wie diese:

$$N(s\ =\ k_0 a_0 + k_1 a_1 + \cdots;\ \ k_0 a_0),$$

oder, da jedes Glied $k_i a_i$ einmal an die Stelle von $k_0 a_0$ kommt:

$$N(s\ =\ \Sigma k_i a_i;\ \ s)\quad \text{d. h.}\quad s.\sigma(s).$$

Mithin ist:

$$(38.)\qquad \sum_n S_d(n).\sigma(s-n)\ =\ s.\sigma(s).$$

Die Betrachtung der Anzahl

$$N(s\ =\ \Sigma k_i u_i + k u_0;\ \ u_0)$$

führt ebenso zu der Formel:

$$(39.)\qquad \sum_n S_u(n)\varrho(s-n)\ =\ s.\varrho(s);$$

endlich die Betrachtung der Anzahldifferenz:

$$N(s\ =\ \Sigma k_i a_i + k a_0;\ \ (-1)^{k+\Sigma k_i}.a_0)$$

zu dieser:

$$(40.)\qquad \sum_n (-1)^n S_u(n)\tau(s-n)\ =\ s\tau(s).$$

Die Anzahldifferenz:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + k a_0;\ (-1)^\lambda a_0\right) \qquad \left(a_0 \gtreqless a_i;\ i = 1, \ldots, \lambda\right)$$

wird nach (24.) einerseits:

$$\sum_k (-1)^k S_d(s - \varpi_k);$$

andererseits reducirt sich dieselbe durch Zuordnung je zweier Zerlegungen:

$$s = \sum_1^\lambda a_i + k a_0 \quad \text{und} \quad s = \sum_0^\lambda a_i + (k-1) a_0$$
$$(a_0 \gtrless a_i;\ i = 1, \ldots, \lambda)$$

auf die Anzahldifferenz:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + a_0;\ (-1)^\lambda a_0\right) = N\left(s = \sum_0^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda s\right);$$

welche nach (24.) nur für $s = \varpi_h$ von Null verschieden ist und dann den Werth $(-1)^{h-1}\varpi_h$ hat. Also ist:

(41.) $$\sum_k (-1)^k S_d(s - \varpi_k) = 0 \text{ im allgem.}, \quad = (-1)^{h-1}\varpi_h \text{ für } s = \varpi_h.$$

Die Anwendung von (29.) ergiebt:

(42.) $$S_d(s) = \sum_k (-1)^{k-1} \varpi_k \sigma(s - \varpi_k).$$

Geben wir dieser Formel die Gestalt:

$$\sum_k (-1)^k (s - \varpi_k).\sigma(s - \varpi_k) = S_d(s),$$

so führt die nochmalige Anwendung von (29.) zurück auf:

(38.) $$s\sigma(s) = \sum_n S_d(n).\sigma(s - n).$$

Von den vorstehenden Sätzen findet sich (25.) bei *Euler* (Novi Comm. Petrop. T. 3 p. 155), ebenso (41.) (ebenda T. 5 „Observatio de summis divisorum"), (26.) bei *Stern* („Beiträge zur Combinationslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen", dieses Journal Bd. 21, p. 91—97 und p. 177—192), (30.) und (42.) pflegte *Kronecker* in der Vorlesung zu geben: „Anwendungen der Analysis auf die Zahlentheorie", (42.) ist überdies von *Zeller* (Acta Mathematica IV, p. 415) veröffentlicht worden.

II.

Wir werden in diesem Paragraphen einen allgemeineren Satz aufstellen und arithmetisch beweisen, welcher ähnlich aus der allgemeineren

Formel folgt:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^{-1})(1-q^{2n-1}z)(1-q^{2n}) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty}(-z)^h q^{h^2},$$

wie der *Euler-Legendre*sche Satz (24.) aus der speciellen *Euler*schen folgte. Es ist jedoch zweckmässig, nicht den unmittelbar aus dieser Formel folgenden Satz zu nehmen, sondern jene Formel erst durch die Substitution:

$$q \parallel x^{\frac{3}{2}},$$
$$z \parallel x^{\frac{1}{2}}z^{-1}$$

zu transformiren in:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{3n-2}.z^{+1})(1-x^{3n-1}z^{-1})(1-x^{3n}) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty}(-z)^h x^{\varpi_h}.$$

Bezeichnen wir den absolut kleinsten Rest einer Zahl n modulo 3 mit $R(n)$, so können wir jene Formel schreiben:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n z^{R(n)}) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty}(-z)^h x^{\varpi_h}.$$

Aus ihr fliesst der bemerkenswerthe, für die Untersuchungen dieses Paragraphen grundlegende, aber bisher nicht aufgestellte Satz:

Unter denjenigen Zerlegungen einer Zahl s in lauter verschiedene Summanden, in welchen die Summe der absolut kleinsten Reste (modulo 3) der Summanden einer gegebenen positiven oder negativen Zahl h gleich ist, giebt es im allgemeinen ebenso viel gerade wie ungerade; allein ausgenommen ist die Pentagonalzahl ϖ_h, für welche es eine mit h zugleich gerade oder ungerade überzählige Zerlegung der betrachteten Art giebt; also:

$$(43.)\quad N\Big(s = \sum_1^k n_i;\ (-1)^k\Big) = 0 \text{ im allg.,} \quad = (-1)^h \text{ für } s = \varpi_h.$$
$$(\text{wo } \Sigma R(n_i) = h)$$

Um diesen Satz arithmetisch zu beweisen, bezeichnen wir mit $|h|$ den absoluten Werth von h, mit $\operatorname{sgn} h$ den Quotienten $\frac{h}{|h|}$, mit a_i die Summanden, welche congruent $\operatorname{sgn} h$ (mod. 3), mit b_i die Summanden, welche congruent $-\operatorname{sgn} h$ (mod. 3), mit $3\gamma_i$ die Summanden, welche congruent Null (mod. 3) sind. Ist $s = \sum_1^{\lambda} a_i + \sum_1^{\mu} b_i + 3\sum_1^{\nu}\gamma_i$ eine der betrachteten Zerlegungen, so ist die Summe h der absolut kleinsten Reste (mod. 3) der Summanden gleich $(\lambda-\mu)\operatorname{sgn} h$; also $\lambda-\mu = |h|$.

Es sei:

$$a_\lambda - a_{\lambda-1} = a_{\lambda-1} - a_{\lambda-2} = \cdots = a_{\lambda-\varkappa+2} - a_{\lambda-\varkappa+1} = 3,$$

aber $a_{\lambda-\varkappa+1} - a_{\lambda-\varkappa} > 3$, so wollen wir $\varkappa$ die Schlusssequenz der Summanden

a nennen. Wir unterscheiden zunächst zwei Klassen von Zerlegungen; die erste Klasse enthält diejenigen, in denen entweder kein Summand γ vorhanden, oder die Schlusssequenz $\varkappa$ der Summanden a kleiner als der erste Summand γ ist; die zweite Klasse enthält diejenigen Zerlegungen, in denen $\varkappa$ nicht kleiner als γ_1 ist. Gehört die Zerlegung:

$$s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i + 3\sum_1^\nu \gamma_i$$

in die erste Klasse, so ordnen wir ihr die folgende zu:

$$s = [a_1 + \cdots + a_{\lambda-\varkappa} + (a_{\lambda-\varkappa+1} - 3) + \cdots + (a_\lambda - 3)] + \sum_1^\mu b_i + 3[\varkappa + \gamma_1 + \cdots + \gamma_\nu],$$

welche offenbar zur zweiten Klasse gehört. Umgekehrt ordnen wir einer Zerlegung $s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i + 3\sum_1^\nu \gamma_i$ der zweiten Klasse eine solche der ersten zu:

$$s = [a_1 + \cdots + a_{\lambda-\gamma_1} + (a_{\lambda-\gamma_1+1} + 3) + \cdots + (a_\lambda + 3)] + \sum_1^\mu b_i + 3\sum_2^\nu \gamma_i.$$

Die angegebene Zuordnung ist eindeutig, es werden dadurch immer je eine gerade und eine ungerade Zerlegung einander zugeordnet, und die Summe der absolut kleinsten Reste (mod. 3) der Summanden ist in zwei einander zugeordneten Zerlegungen dieselbe.

Durch diese Zuordnung werden aber nicht alle Zerlegungen erschöpft; und zwar giebt es zu einer Zerlegung der ersten Klasse dann und nur dann keine entsprechende, wenn $\varkappa = \lambda$, $a_1 < 3$ ist, da sich die $\varkappa$ letzten d. h. alle Summanden a alsdann nicht um je drei Einheiten vermindern lassen. Zu einer Zerlegung der zweiten Klasse giebt es dann und nur dann keine entsprechende, wenn $\varkappa = \lambda$, $a_1 < 3$, $\gamma_1 = 0$ oder $> \lambda$ ist, da das Glied $3\gamma_1$ alsdann nicht auf die γ_1 letzten Summanden a zu je drei Einheiten vertheilt werden kann. Von diesen noch nicht zu Paaren geordneten Zerlegungen, für welche also $\varkappa = \lambda$, $a_1 < 3$, $\gamma_1 = 0$ oder $> \lambda$ ist, rechnen wir in eine dritte Klasse diejenigen, bei welchen

$$\varkappa = \lambda, \quad a_1 < 3, \quad \frac{a_\lambda + b_1}{3} < \gamma_1 \quad \text{oder } \gamma_1 = 0$$

ist; in eine vierte diejenigen, bei welchen

$$\varkappa = \lambda, \quad a_1 < 3, \quad \frac{a_\lambda + b_1}{3} \geqq \gamma_1$$

ist. Gehört die betrachtete Zerlegung $s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i + 3\sum_1^\nu \gamma_i$ zu denen der dritten Klasse, so ordnen wir ihr diese zu:

$$s = \sum_1^{\lambda-1} a_i + \sum_2^\mu b_i + 3\left[\frac{a_\lambda + b_1}{3} + \gamma_1 + \cdots + \gamma_\nu\right];$$

dieselbe gehört in die vierte Klasse, denn die Schlusssequenz der Summanden a ist gleich der Anzahl derselben, a_1 ist kleiner als 3, $a_{\lambda-1}+b_2$ ist gleich $a_\lambda+b_2-3$, also nicht kleiner als $a_\lambda+b_1$, d. h. nicht kleiner als das Dreifache des kleinsten Summanden γ, welcher hier gleich $\frac{a_\lambda+b_1}{3}$ ist. Gehört endlich die betrachtete Zerlegung $s=\sum_1^\lambda a_i+\sum_1^\mu b_i+3\sum_1^\nu\gamma_i$ in die vierte Klasse, so ordnen wir ihr die folgende zu:

$$s = [a_1+\cdots+a_\lambda+(a_\lambda+3)]+[(3\gamma_1-a_\lambda-3)+b_1+\cdots+b_\mu]+3\sum_2^\nu\gamma_i;$$

dieselbe gehört in die dritte Klasse, denn die Schlusssequenz der Summanden a ist gleich ihrer Anzahl, a_1 ist kleiner als 3, $\frac{a_{\lambda+1}+b_0}{3}$ d. h. $\frac{(a_\lambda+3)+(3\gamma_1-a_\lambda-3)}{3}$ ist gleich γ_1, also kleiner als der erste Summand γ, oder aber es ist kein Summand γ vorhanden.

Die angegebene Zuordnung der Zerlegungen der dritten und vierten Klasse erfüllt die Bedingungen je eine gerade und eine ungerade Zerlegung einander eindeutig zuzuordnen, während die Summe der absolut kleinsten Reste (mod. 3) der Summanden in beiden dieselbe ist.

Die Zuordnung versagt offenbar dann und nur dann, wenn gleichzeitig kein Summand γ und kein Summand b vorhanden ist; also, für $h>0$, da dann $\lambda=h$, $a_i\equiv 1$ (mod. 3), $a_1<3$ sein muss, bei der Zerlegung:

$$1+4+7+10+\cdots+(3h-2) = \frac{3h^2-h}{2};$$

für $h<0$, da dann $\lambda=|h|$, $a_i\equiv -1$ (mod. 3), $a_1<3$ sein muss, bei der Zerlegung:

$$2+5+8+11+\cdots+(3|h|-1) = \frac{3|h|^2+|h|}{2} = \frac{3h^2-h}{2}.$$

Da überdies diese Ausnahmezerlegungen mit h zugleich gerade oder ungerade sind, ist der oben ausgesprochene Satz (43.) bewiesen.

Aus ihm folgt durch Summirung über alle zulässigen Werthe von h der frühere specielle *Euler-Legendre*sche Satz (24.).

Wir hatten, um die beiden Fälle, dass h positiv oder negativ ist, zusammen zu behandeln, $a_i\equiv \operatorname{sgn} h$, $b_i\equiv -\operatorname{sgn} h$ (mod. 3) gesetzt. Wir wollen jetzt in beiden Fällen setzen:

$$a_i = 3\alpha_i+1,\quad b_i = 3\beta_i-1,\quad c_i = 3\gamma_i,$$

so dass in unseren Zerlegungen:

$$s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i + \sum_1^\nu c_i, \quad \lambda - \mu = h$$

ist. Aus jeder solchen Zerlegung folgt eine für $s_1 = \frac{s-h}{3}$, nämlich:

$$s_1 = \sum_1^\lambda{}' \alpha_i + \sum_1^\mu \beta_i + \sum_1^\nu \gamma_i,$$

wo $\sum_1^\lambda{}' \alpha_i$ eine Summe von λ Summanden bedeutet, deren einer auch gleich Null sein darf. Also ist:

$$(44.)\quad \begin{cases} N\Big(s = \sum_1^\lambda{}' \alpha_i + \sum_1^\mu \beta_i + \sum_1^\nu \gamma_i;\ \underset{(\lambda-\mu=h)}{(-1)^{\lambda+\mu+\nu}}\Big) = 0 \text{ im allg.,} \\ \qquad = (-1)^h \text{ für } s = \frac{h^2-h}{2}. \end{cases}$$

Da wir später eine grosse Zahl ähnlicher Formeln erhalten werden, wollen wir auch auf der rechten Seite unser Zeichen N anwenden; bei der vorstehenden Gleichung werden wir z. B. die rechte Seite schreiben: $N\Big(s = \frac{h^2-h}{2};\ (-1)^h\Big)$. Für $h = 0$ ergiebt sich:

$$(45.)\qquad N\Big(s = \sum_1^\mu{}' a_i + \sum_1^\mu b_i + \sum_1^\nu c_i;\ (-1)^\nu\Big) = 0$$

für $s > 0$; für $s = 0$ ist diese Anzahl gleich Eins zu setzen. Wenden wir auf die Summe $\sum_1^\nu c_i$ den Satz (24.) an, so geht (45.) über in:

$$\Sigma(-1)^k N\Big(s - \varpi_k = \sum_1^\mu{}' a_i + \sum_1^\mu b_i\Big) = 0.$$

Die Function $N\Big(s = \sum_1^\mu{}' a_i + \sum_1^\mu b_i\Big)$ genügt also derselben Recursionsformel wie die Function $\sigma(s)$, (25.); da ferner auch $N\Big(0 = \sum_1^\mu{}' a_i + \sum_1^\mu b_i\Big) = \sigma(0) = 1$ zu setzen ist, ist allgemein:

$$(46.)\qquad N\Big(s = \sum_1^\mu{}' a_i + \sum_1^\mu b_i\Big) = \sigma(s).$$

Aber auch die allgemeinere Anzahl:

$$N\Big(s = \sum_1^{\mu+h}{}' a_i + \sum_1^\mu b_i + \sum_1^\nu c_i\Big), \qquad (h > 0)$$

ist auf die σ-Function zurückzuführen.

Wenden wir zu diesem Zweck auf die Anzahldifferenz:

$$N\Big(s = \sum_1^{\lambda}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i + \sum_1^{\nu} c_i + \Sigma k_i d_i;\; (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big) \qquad (\lambda-\mu = h > 0)$$

den Satz (44.) an, so reducirt sich dieselbe auf $(-1)^h \sigma\big(s - \frac{h^2-h}{2}\big)$; wenden wir dagegen auf die beiden letzten Summen $\sum_1^{\nu} c_i + \Sigma k_i d_i$ den Satz (10.) an, so reducirt sie sich auf:

$$(-1)^h N\Big(s = \sum_1^{\mu+h}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i\Big);$$

also ist:

$$N\Big(s = \sum_1^{\mu+h}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i\Big) = \sigma\Big(s - \frac{h^2-h}{2}\Big). \tag{47.}$$

Setzen wir vorübergehend:

$$N\Big(s = \sum_1^{\mu+h} a_i + \sum_1^{\mu} b_i\Big) = N_h,$$

so wird (47.):

$$N_h + N_{h-1} = \sigma\Big(s - \frac{h^2-h}{2}\Big).$$

Daraus folgt leicht einerseits:

$$\begin{aligned} N_0(s) &= \sigma(s) - \sigma(s-1) + \sigma(s-3) - \sigma(s-6) + \cdots, \\ N_1(s) &= \sigma(s-1) - \sigma(s-3) + \sigma(s-6) - \sigma(s-10) + \cdots, \\ N_2(s) &= \sigma(s-3) - \sigma(s-6) + \sigma(s-10) - \sigma(s-15) + \cdots \end{aligned}$$

u. s. w., allgemein:

$$N_k(s) \text{ d. h. } N\Big(s = \sum_1^{\mu+k} a_i + \sum_1^{\mu} b_i\Big) = (-1)^k \sum_{\substack{h \\ (h = k+1,\, k+2,\, \ldots)}} (-1)^h \sigma\Big(s - \frac{h^2-h}{2}\Big), \tag{48.}$$

wo die Summation so weit fortzusetzen ist, als das Argument nicht negativ wird; andererseits folgt daraus:

$$(N_0 + N_1) + (N_1 + N_2) + (N_2 + N_3) + \cdots$$

d. h.

$$N(s = \Sigma a_i + \Sigma b_i) = \sum_{h=1,2,3,\ldots} \sigma\Big(s - \frac{h^2-h}{2}\Big). \tag{49.}$$

Kehren wir zum Satz (44.) zurück. Setzen wir in $(-1)^{\lambda+\mu+\nu}$ für λ ein $\mu+h$, so erhalten wir:

$$N\Big(s = \sum_1^{\mu+h}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i + \sum_1^{\nu} c_i;\; (-1)^{\nu}\Big) = N\Big(s = \frac{h^2-h}{2}\Big). \tag{50.}$$

Setzen wir in dieser Gleichung der Reihe nach $h = 1, 2, 3, \ldots, H$, wo $s < \frac{H^2-H}{2}$ ist, und addiren die entstehenden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$N\left(s = \sum_1^\mu a_i + \sum_1^\mu b_i + \sum_1^\nu c_i;\ (-1)^\nu\right)$$
$$+2\sum_\lambda N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i + \sum_1^\nu c_i;\ (-1)^\nu\right) \quad {\scriptstyle (\lambda = \mu+1,\ \mu+2,\ \mu+3,\ \ldots,\ \mu+H)}$$

d. h.

$$(51.)\qquad \underset{(\lambda \gtreqless \mu)}{N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i + \sum_1^\nu c_i;\ (-1)^\nu\right)} = \underset{(h>0)}{N\left(s = \frac{h^2-h}{2}\right)}.$$

Durch Anwendung des Satzes (14.) auf (51.) folgt:

$$(52.)\qquad N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu g_i';\ (-1)^\mu\right) = N\left(s = \frac{h^2-h}{2}\right).$$

Trennen wir Σa_i in $\Sigma u_i + \Sigma g_i$, so liefert der Satz (14.) aus (52.) den Satz:

$$(53.)\qquad N\left(s = 2\sum_1^\mu g_i + \Sigma u_i;\ (-1)^\mu\right) = N\left(s = \frac{h^2-h}{2}\right).$$

Die Sätze (52.) und (53.) geben unmittelbar die Recursionsformeln:

$$(54.)\qquad \Sigma(-1)^k \varrho(s - 2\varpi_k) = 0 \text{ im allg.,} \quad = 1 \text{ für } s = \frac{h^2-h}{2},$$

$$(55.)\qquad \Sigma(-1)^k \tau(s - 4\varpi_k) = 0 \text{ im allg.,} \quad = 1 \text{ für } s = \frac{h^2-h}{2}.$$

Aus ihnen folgt durch Anwendung des Satzes (29.):

$$(56.)\qquad \varrho(s) = \sum_h \sigma\left(\frac{s - \frac{h^2-h}{2}}{2}\right),$$

$$(57.)\qquad \tau(s) = \sum_h \sigma\left(\frac{s - \frac{h^2-h}{2}}{4}\right).$$

Diese Formeln haben vor den früher angegebenen (30.) und (31.) den Vorzug, aus einer geringeren Anzahl Glieder zu bestehen, die überdies alle positiv sind.

Noch in anderer Weise lassen sich aus (51.), (52.), (53.) Recursionsformeln herleiten. Betrachten wir z. B. die Anzahldifferenz:

$$N\left(s = 2\sum_1^\mu g_i + \Sigma u_i + \sum_1^\lambda u_i';\ (-1)^{\lambda+\mu}\right),$$

welche sich durch (53.) auf:

$$\Sigma(-1)^{s-\frac{k(k-1)}{2}}\tau\left(s-\frac{k(k-1)}{2}\right)$$

reducirt. Dieselbe geht andererseits durch Anwendung von (14.) über in:

$$N\left(s = 2\sum_1^\mu g_i+2\sum_1^\nu u_i;\ (-1)^{\mu+\nu}\right) = N\left(s = 2\sum_1^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda\right),$$

also nach (24.) in $N(s = 2\varpi_h;\ (-1)^h)$. Da ferner $\frac{k(k-1)}{2}$ mit $\left[\frac{k}{2}\right]$ zugleich gerade oder ungerade ist, wenn $\left[\frac{k}{2}\right]$ die ganze der beiden Zahlen $\frac{k}{2}$ und $\frac{k-1}{2}$ bedeutet, so erhalten wir:

$$(58.)\qquad \sum_k(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\tau\left(s-\frac{k(k-1)}{2}\right) = 0 \text{ im allg.,}\quad = (-1)^h \text{ für } s = 2\varpi_h.$$

Setzen wir in Satz (51.), der übrigens der *Gauss*schen Formel:

$$\prod_n(1+x^n)^2(1-x^n) = \sum_{h=1,2,\dots} x^{\frac{h^2-h}{2}}$$

entspricht, $\frac{s-1}{8}$ für s, so geht derselbe in den später zu benutzenden über:

$$(59.)\qquad N\left(s = 1+8\sum_1^\lambda a_i+8\Sigma b_i+8\Sigma c_i;\ (-1)^\lambda\right) = N(s = u^2). \qquad (u>0)$$

Es seien m und n zwei gegebene positive Zahlen, $2n < m$, dann folgt aus jeder Zerlegung:

$$s = \sum_1^\lambda{}' \alpha_i+\sum_1^\mu\beta_i+\sum_1^\nu\gamma_i,\quad \text{wo } \lambda-\mu = h \text{ ist,}$$

eine Zerlegung von $ms+nh$, nämlich:

$$ms+nh = \sum_1^\lambda(m\alpha_i+n)+\sum_1^\mu(m\beta_i-n)+\sum_1^\nu m\gamma_i,$$

in welcher die Summe der absolut kleinsten Reste (mod. m) der Summanden gleich nh ist. Der Satz (44.) geht dadurch in den folgenden über:

$$(60.)\qquad N\left(s = \sum_1^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda\right) = N\left(s = \frac{mh^2-(m-2n)h}{2};\ (-1)^h\right);$$
$$(a_i \equiv 0,\ +n,\ -n \text{ (mod. } m),\ \Sigma R(a_i) = hn)$$

hier ist mit $R(a)$ der absolut kleinste Rest von a (mod. m) bezeichnet worden. Durch Summirung über alle zulässigen Werthe von h kommt:

$$(61.)\qquad N\left(s = \sum_1^\lambda a_i;\ (-1)^\lambda\right) = N\left(s = \frac{mh^2-(m-2n)h}{2};\ (-1)^h\right).$$
$$(a_i \equiv 0,\ +n,\ -n \text{ (mod. } m))$$

Für $n=1$ ergiebt sich aus (60.) und (61.):

$$(62.)\quad N\Big(s=\sum_1^{\lambda}a_i;\ (-1)^{\lambda}\Big)=N\Big(s=\frac{mh^2-(m-2n)h}{2};\ (-1)^h\Big),$$
$$(a_i\equiv 0,\ \pm 1\ (\mathrm{mod.}\, m),\quad \Sigma R(a_i)=h)$$

$$(63.)\quad N\Big(s=\sum_1^{\lambda}a_i;\ (-1)^{\lambda}\Big)=N\Big(s=\frac{mh^2-(m-2)h}{2};\ (-1)^h\Big).$$
$$(a_i\equiv 0,\ \pm 1\ (\mathrm{mod.}\, m))$$

Durch diese vier Sätze werden die Sätze (24.) und (43.) von Pentagonal- auf Polygonalzahlen ausgedehnt.

Für $m=2$ folgt aus (62.) und (63.):

$$(64.)\quad N\Big(s=\sum_1^{\lambda}g_i+\sum_1^{\mu}u_i'+\sum_1^{\nu}u_i'';\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big)_{(\mu-\nu=h)}=N(s=h^2;\ (-1)^h),$$

$$(65.)\quad N\Big(s=\sum_1^{\lambda}g_i+\sum_1^{\mu}u_i'+\sum_1^{\nu}u_i'';\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big)=N(s=h^2;\ (-1)^h).\quad (h\gtreqless 0)$$

Der Satz (64.) entspricht der Formel:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^{-1})(1-q^{2n-1}z)(1-q^{2n})=\sum_{h=-\infty}^{+\infty}(-z)^h q^{h^2}.$$

Setzen wir in (64.) $\nu+h$ für μ ein, so wird:

$$(66.)\quad N\Big(s=\sum_1^{\lambda}g_i+\sum_1^{\nu+h}u_i'+\sum_1^{\nu}u_i'';\ (-1)^{\lambda}\Big)=N(s=h^2);$$

und durch Summirung über alle zulässigen Werthe von h:

$$(67.)\quad N\Big(s=\sum_1^{\lambda}g_i+\Sigma u_i'+\Sigma u_i'';\ (-1)^{\lambda}\Big)=N(s=h^2).\quad (h\gtreqless 0)$$

Die Formeln (65.) und (67.) werden wir auch in der Form gebrauchen:

$$(68.)\quad N\Big(s=4\sum_1^{\lambda}g_i+4\sum_1^{\mu}u_i'+4\sum_1^{\nu}u_i'';\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big)=N\Big(s=g^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}\Big),\quad (g\gtreqless 0)$$

$$(69.)\quad N\Big(s=4\sum_1^{\lambda}g_i+4\Sigma u_i'+4\Sigma u_i'';\ (-1)^{\lambda}\Big)=N(s=g^2).\quad (g\gtreqless 0)$$

In den Formeln (65.), (67.), (68.), (69.) wird durch das Hinzufügen der Bedingung h (bezw. g) $\gtreqless 0$ daran erinnert, dass die beiden Darstellungen $s=(+h)^2$, $s=(-h)^2$ als zwei verschiedene, dagegen $s=(\pm 0)^2$ als eine einzige zu zählen ist, so dass, wenn s ein Quadrat ist, $N(s=h^2)=2$, aber $N(0=h^2)=1$ zu setzen ist.

Bezeichnen wir mit $S_{m,n}(s)$ die Summe derjenigen Divisoren von s, welche in den Formen ma, $ma\pm n$ enthalten sind, so liefert die Behandlung der Anzahldifferenz $N\Big(s=\sum_1^{\lambda}a_i+k.a_0;\ (-1)^{\lambda}a_0\Big)$, wo die Summanden a nur

jene drei Formen haben, wie bei (41.) die Recursionsformel:

$$(70.)\quad \Sigma(-1)^k S_{m,n}\left(s-\frac{mk^2-(m-2n)k}{2}\right) = -s.N\left(s=\frac{mh^2-(m-2n)h}{2};\ (-1)^k\right).$$

Führen wir für die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl s in beliebig oft genommene Summanden von den Formen ma, $ma\pm n$ die Bezeichnung $\sigma_{m,n}(s)$ ein, so genügt diese Function der Recursionsformel:

$$(71.)\qquad \sum_k(-1)^k\sigma_{m,n}\left(s-\frac{mk^2-(m-2n)k}{2}\right) = 0.$$

Aus dieser und aus (70.) ergiebt sich wie bei (42.):

$$(72.)\qquad S_{m,n}(s) = \sum_k(-1)^{k-1}\frac{mk^2-(m-2n)k}{2}\sigma_{m,n}\left(s-\frac{mk^2-(m-2n)k}{2}\right),$$

$$(73.)\qquad s\sigma_{m,n}(s) = \sum_h S_{m,n}(s-h)\sigma_{m,n}(h).$$

Bezeichnen wir ferner mit $D_{m,n}(s)$ die Differenz zwischen der Summe derjenigen Divisoren von s, welche die Formen mu, $mu\pm n$ haben, und der Summe der Divisoren von den Formen mg, $mg\pm n$, so ergiebt sich die Recursionsformel:

$$(74.)\quad \sum_k D_{m,n}\left(s-\frac{mk^2-(m-2n)k}{2}\right) = s.N\left(s=\frac{mh^2-(m-2n)h}{2}\right).$$

Führen wir durch die Recursionsformel:

$$(75.)\qquad \sum_k\delta_{m,n}\left(s-\frac{mk^2-(m-2n)k}{2}\right) = 0$$

die Function $\delta_{m,n}$ ein, deren anzahlarithmetische Bedeutung leicht ersichtlich ist, so folgt wie oben:

$$(76.)\quad D_{m,n}(s) = \sum_h\frac{mh^2-(m-2n)h}{2}\cdot\delta_{m,n}\left(s-\frac{mh^2-(m-2n)h}{2}\right),$$

$$(77.)\quad s\delta_{m,n}(s) = \sum_h D_{m,n}(s-h).\delta_{m,n}(h).$$

Setzen wir in (70.) $m=3$, $n=1$, so erhalten wir die *Euler*sche Formel (41.) für die Divisorensummen. Setzen wir $m=2$, $n=1$, so erhalten wir die Recursionsformel:

$$(78.)\qquad \sum_k(-1)^k S'_u(s-k^2) = -s.N(s=h^2;\ (-1)^h); \qquad (h>0)$$

es wird nämlich:

$$S_{2,1}(s) = 2S_u(s)+S_g(s) = 2S'_u(s).$$

Setzen wir in (74.) $m=1$, $n=0$, so wird:

$$D_{1,0}(s) = 2S_u(s)-2S_g(s) = 2D(s),$$

wir erhalten also die Formel:

$$(79.)\qquad \sum_k D\left(s-\frac{k^2-k}{2}\right) = s.N\left(s = \frac{h^2-h}{2}\right). \qquad (h>0)$$

III.

Aus (66.) folgt für gerade Werthe von s:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda g_i + \sum_1^\mu u'_i + \sum_1^\nu u''_i;\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu-\nu}{2}}\right) = N\left(s = g^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}\right), \quad (\mu-\nu=g)$$

oder durch Summirung über alle zulässigen Werthe von g:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda g_i + \sum^\mu u'_i + \sum^\nu u''_i;\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu-\nu}{2}}\right) = N\left(s = g^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}\right); \quad (g \gtreqless 0)$$

durch Anwendung von (16.):

$$(80.)\qquad N\left(s = \sum_1^\lambda g_i + 2\sum_1^1 u_i;\ (-1)^\lambda\right) = N\left(s = g^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}\right). \qquad (g \gtreqless 0)$$

Setzt man $2s$ für s, so kommt:

$$(81.)\qquad N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + \Sigma u_i;\ (-1)^\lambda\right) = N\left(s = 2h^2;\ (-1)^h\right). \qquad (h \gtreqless 0)$$

[Dieser Satz ergiebt ohne weiteres die beiden Formeln:

$$(82.)\qquad \sum_k (-1)^k \tau(s-\varpi_k) = N\left(s = 2h^2;\ (-1)^h\right), \qquad (h \gtreqless 0)$$

$$(83.)\qquad \tau(s) = \sum_{h=0,\pm1,\pm2,\dots} (-1)^h . \sigma(s-2h^2).]$$

Aus (66.) folgt für ungerade Werthe von s:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda g_i + \sum_1^\mu u'_i + \sum_1^\nu u''_i;\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu-\nu-1}{2}}.(\mu-\nu)\right) = N\left(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} u\right);$$
$$(\mu-\nu=u)$$

durch Summirung über alle in Betracht kommenden Werthe von u:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda g_i + \sum_1^\mu u'_i + \sum_1^\nu u''_i;\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu-\nu-1}{2}}.(\mu-\nu)\right) = N\left(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} u\right).$$
$$(u'_{i'} \gtreqless u''_{i''}) \qquad\qquad (u \gtrless 0)$$

Diese Anzahldifferenz nimmt durch Zusammenfassen der in den beiden Summen $\Sigma u'_i$ und $\Sigma u''_i$ zugleich vorkommenden Summanden die Form an:

$$N\left(s = \sum_1^\lambda g_i + 2\Sigma u_i + \sum_1^\mu u'_{i'} + \sum_1^\nu u''_{i''};\ (-1)^{\lambda+\frac{\mu-\nu-1}{2}}.(\mu-\nu)\right). \quad (u_i \neq u'_{i'} \neq u''_{i''})$$

Diese ist der folgenden gleich:

$$2N\Big(s = \sum_1^{\lambda} g_i + 2\Sigma u_i + \sum_1^{\lambda'} u'_{i'} + \sum_1^{\lambda''} u''_{i''} + u_0;\ (-1)^{\lambda + \frac{\lambda' - \lambda''}{2}}\Big).$$
$$(u_i \mp u'_{i'} \mp u''_{i''} \mp u_0)$$

Denn aus allen Zerlegungen der Art:

$$\sum_1^{\mu} u'_{i'} + \sum_1^{\nu} u''_{i''} \qquad (u'_{i'} \mp u''_{i''})$$

erhalten wir durch Entnahme jedes Elementes der ersten und der zweiten Summe:

$$\sum_1^{\mu} u'_{i'} + \sum_1^{\nu} u''_{i''} + u'_{h'}, \quad h' = 1,\ 2,\ \ldots,\ \mu,$$
$$(i' \mp h')$$
$$\sum_1^{\mu} u'_{i'} + \sum_1^{\nu} u''_{i''} + u''_{h''}, \quad h'' = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,$$
$$(i'' \mp h'')$$

alle Zerlegungen der Art:

$$\sum_1^{\lambda'} u'_{i'} + \sum_1^{\lambda''} u''_{i''} + u_0, \qquad (u'_{i'} \mp u''_{i''} \mp u_0)$$

aber jede zweimal. Zählen wir jede solche Zerlegung $(-1)^{\frac{\lambda'-\lambda''}{2}}$-mal, so ergeben die aus derselben Zerlegung $\sum_1^{\mu} u'_{i'} + \sum_1^{\nu} u''_{i''}$ entspringenden Zerlegungen den Beitrag $(-1)^{\frac{(\mu-1)-\nu}{2}}\mu + (-1)^{\frac{\mu-(\nu-1)}{2}}\nu = (-1)^{\frac{\mu-\nu-1}{2}}(\mu-\nu)$ zu der Anzahldifferenz

$$N\Big(s = \sum_1^{\lambda} g_i + 2\Sigma u_i + \sum_1^{\lambda'} u'_{i'} + \sum_1^{\lambda''} u''_{i''} + u_0;\ (-1)^{\lambda + \frac{\lambda' - \lambda''}{2}}\Big),$$

also denselben Beitrag wie die Zerlegung $\sum_1^{\mu} u'_{i'} + \sum_1^{\nu} u''_{i''}$ zu der Anzahldifferenz

$$N\Big(s = \sum_1^{\lambda} g_i + 2\Sigma u_i + \sum_1^{\mu} u'_{i'} + \sum_1^{\nu} u''_{i''};\ (-1)^{\lambda + \frac{\mu-\nu-1}{2}}(\mu-\nu)\Big).$$

Also ist in der That:

$$N\Big(s = \sum_1^{\lambda} g_i + 2\Sigma u_i + \sum_1^{\mu} u'_{i'} + \sum_1^{\nu} u''_{i''};\ (-1)^{\lambda + \frac{\mu-\nu-1}{2}}(\mu-\nu)\Big)$$
$$(u_i \mp u'_{i'} \mp u''_{i''})$$
$$= 2.N\Big(s = \sum_1^{\lambda} g_i + 2\Sigma u_i + \sum_1^{\mu} u'_{i'} + \sum_1^{\nu} u''_{i''} + u_0;\ (-1)^{\lambda + \frac{\mu-\nu}{2}}\Big).$$
$$(u_i \mp u'_{i'} \mp u''_{i''} \mp u_0)$$

Wenden wir jetzt wieder den Satz (16.) an, so wird die betrachtete Anzahldifferenz gleich:

$$2.N\Big(s = \sum_1^\lambda g_i + 2\Sigma u_i + u_0;\ (-1)^\lambda\Big). \qquad (u_i \neq u_0)$$

Diese stimmt mit der folgenden überein:

$$2.N\Big(s = \sum_1^\lambda g_i + 2\Sigma u_i + u.u_0;\ (-1)^{\lambda + \frac{u-1}{2}}\Big), \qquad \left(u_i \gtreqless u_0\right)$$

da je zwei solche Zerlegungen:

$$s = \sum_1^\lambda g_i + 2\sum_1^\mu u_i + u.u_0, \qquad (u_i \neq u_0)$$

$$s = \sum_1^\lambda g_i + 2\sum_0^\mu u_i + (u-2)u_0, \qquad \left(u_i \gtreqless u_0\right)$$

den Beitrag $(-1)^{\lambda + \frac{u-1}{2}} + (-1)^{\lambda + \frac{u-3}{2}} = 0$ ergeben, also von diesen Zerlegungen nur diejenigen übrig bleiben, in denen $u = 1$, $u_i \neq u_0$ ist. Machen wir schliesslich noch von dem Satze (80.) Gebrauch, so wird unsere Anzahldifferenz:

$$2.N\big(s = g^2 + u.u_0;\ (-1)^{\frac{g}{2} + \frac{u-1}{2}}\big); \qquad \left(g \gtreqless 0\right)$$

also ist:

$$(84.) \qquad N\big(s = g^2 + u.u_0;\ (-1)^{\frac{g}{2} + \frac{u-1}{2}}\big) = N\big(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} u\big),$$
$$\left(g \gtreqless 0\right) \qquad\qquad u > 0$$

für ungerade Zahlen s. Setzen wir für diese:

$$(85.) \qquad \chi(s) = \sum_{u.u_0 = s} (-1)^{\frac{u-1}{2}}$$

d. h. $\chi(s)$ gleich dem Ueberschuss der Anzahl der Divisoren von s, welche die Form $4n+1$ haben, über die Anzahl derer von der Form $4n-1$, so folgt aus (84.):

$$(86.) \qquad \Sigma(-1)^{\frac{g}{2}} \chi(s - g^2) = N\big(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}} u\big). \qquad (u > 0,\ g = 0,\ \pm 2, \ldots)$$

Wir knüpfen noch einmal an den Satz (44.) an. Bezeichnen wir für den vorliegenden Zweck

$$N\Big(s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i + \sum_1^\nu c_i;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big) \qquad (\lambda - \mu = k)$$

mit D_k, so lautet Satz (44.)

$$D_k - D_{k-1} = N\Big(s = \frac{k^2 - k}{2};\ (-1)^k\Big),$$

und zwar für $k > 0$. Dieselbe Formel gilt aber auch für $k \leqq 0$; denn setzen wir dann $k = -k'+1$, so folgt aus

$$D_{k'} - D_{k'-1} = N\left(s = \frac{k'^2-k'}{2};\ (-1)^{k'}\right),$$

vermittelst $D_i = D_{-i}$, dass auch

$$D_k - D_{k-1} = N\left(s = \frac{k^2-k}{2};\ (-1)^k\right)$$

ist. Ist nun zunächst s keine Trigonalzahl, und K so gewählt, dass $\frac{K(K-1)}{2} > s$ ist, so giebt es keine Darstellung von s durch K verschiedene Summanden. Da folglich $D_K = 0$ ist, ergeben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} D_K - D_{K-1} &= 0, \\ D_{K-1} - D_{K-2} &= 0, \end{aligned}$$

etc. bis zu

$$D_{-K+1} - D_{-K} = 0,$$

dass alle Differenzen D_k verschwinden; also auch ihre Summe, d. h.

$$N\left(s = \sum_1^{\lambda} a_i + \sum_1^{\mu} b_i + \sum_1^{\nu} c_i;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\right) = 0.$$

Ist dagegen s eine Trigonalzahl $s = \frac{h^2+h}{2}$, so folgt, wenn K in derselben Weise gewählt wird, aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} D_K - D_{K-1} &= 0, \\ &\vdots \\ D_{h+2} - D_{h+1} &= 0, \\ D_{h+1} - D_h &= (-1)^{h+1}, \\ D_h - D_{h-1} &= 0, \\ &\vdots \\ D_{-h+1} - D_{-h} &= 0, \\ D_{-h} - D_{-h-1} &= (-1)^h, \\ D_{-h-1} - D_{-h-2} &= 0, \\ &\vdots \\ D_{-K+1} - D_{-K} &= 0, \end{aligned}$$

dass zwar:

$$D_K = D_{K-1} = \cdots = D_{h+1} = D_{-h-1} = \cdots = D_{-K} = 0$$

ist, aber:

$$D_h = (-1)^h, \quad \text{also auch} \quad D_{h-1} = D_{h-2} = \cdots = D_{-h+1} = D_{-h} = (-1)^h;$$

folglich ist die Summe $\Sigma D_k = (-1)^h(2h+1)$, d. h.

$$(87.) \quad N\Big(s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i + \sum_1^\nu c_i;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big) = N\Big(s = \frac{h^2+h}{2};\ (-1)^h(2h+1)\Big).$$

Andererseits folgt aus (24.) ohne Weiteres, dass

$$N\Big(s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i + \sum_1^\nu c_i;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big) = N(s = \varpi_\lambda + \varpi_\mu + \varpi_\nu;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu})$$

ist; mithin ist auch:

$$(88.) \quad N(s = \varpi_\lambda + \varpi_\mu + \varpi_\nu;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}) = N\Big(s = \frac{h^2+h}{2};\ (-1)^h(2h+1)\Big);$$

d. h.:

Die Anzahldifferenz der geraden und ungeraden Zerlegungen einer Zahl s in drei Pentagonalzahlen ist im allgemeinen Null, aber gleich $(-1)^h(2h+1)$ für jede Trigonalzahl $\frac{h^2+h}{2}$. — Dabei wird eine Darstellung durch drei Pentagonalzahlen $\varpi_\lambda + \varpi_\mu + \varpi_\nu$ gerade oder ungerade genannt, je nachdem die Indexsumme $\lambda+\mu+\nu$ gerade oder ungerade ist.

Dieser Satz entspricht der Formel:

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x^{\frac{3k^2-k}{2}}\Big)^3 = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h(2h+1) x^{\frac{h^2+h}{2}},$$

die sich schon in *Gauss'* Nachlass findet, aber zuerst von *Jacobi* in den „Fundamenta nova" mitgetheilt und später in der Abhandlung „Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel, nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen" (*Jacobi*s ges. Werke Bd. VI, p. 281—302) arithmetisch bewiesen worden ist.

Jacobi zieht aus diesem Satze den Schluss, dass jede Zahl in der Form $\alpha^2+2\beta^2+3\gamma^2+6\delta^2$ darstellbar ist. Da ferner identisch:

$$\alpha^2+2\beta^2+3\gamma^2+6\delta^2 = \alpha^2+(\beta+\gamma+\delta)^2+(-\beta+\gamma+\delta)^2+(\gamma-2\delta)^2$$

ist, folgt daraus, dass sich auch jede Zahl als Summe von vier Quadraten darstellen lässt. —

[Aus (87.) und (88.) folgt für die Anzahldifferenz:

$$N\Big(s = \sum_1^\lambda a_i + \sum_1^\mu b_i;\ (-1)^{\lambda+\mu}\Big) = N(s = \varpi_\lambda + \varpi_\mu;\ (-1)^{\lambda+\mu}) = N(s)$$

die Recursionsformel:

$$(89.)\qquad \Sigma(-1)^k N(s-\varpi_k) = N\Big(s=\frac{h^2+h}{2};\ (-1)^h(2h+1)\Big),$$

also nach (29.):

$$(90.)\qquad N(s=\varpi_\lambda+\varpi_\mu;\ (-1)^{\lambda+\mu}) = \sum_{h=0,1,2,\dots}(-1)^h(2h+1)\sigma\Big(s-\frac{h^2+h}{2}\Big).\Big]$$

Den Satz (87.) brauchen wir in der Form:

$$(91.)\qquad N\Big(s=1+8\sum_1^\lambda a_i+8\sum_1^\mu b_i+8\sum_1^\nu c_i;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big)=\underset{(u>0)}{N(s=u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}}u)}.$$

Durch Verbindung der Sätze (59.), (68.), (69.) ergiebt sich:

$$\begin{aligned} N\Big(s = 1&+8\sum_1^\lambda a_i+8\Sigma b_i+8\Sigma c_i\\ &+8\sum_1^{\lambda'} a_i'+4\sum_1^\mu u_i'+4\sum_1^\nu v_i'\\ &+8\sum_1^{\lambda''} a_i''+4\Sigma u_i''+4\Sigma v_i'';\ (-1)^{\lambda+\lambda'+\lambda''+\mu+\nu}\Big)\end{aligned}$$

$$= N(s=g^2+g_1^2+u_1^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}),\quad (g \gtreqless 0,\ g_1\gtreqless 0,\ u_1>0);$$

fassen wir

$$8\Sigma b_i+4\Sigma u_i'' \text{ in } 4\Sigma b_i'$$

und

$$8\Sigma c_i+4\Sigma v_i'' \text{ in } 4\Sigma c_i'$$

zusammen, wenden dann auf $\Sigma b_i'+\sum_1^\mu u_i'$ und auf $\Sigma c_i'+\sum_1^\nu v_i'$ den Satz (12.) an, so wird:

$$N\Big(s=1+8\sum_1^\lambda a_i+8\sum_1^{\lambda'} a_i'+8\sum_1^{\lambda''} a_i'';\ (-1)^{\lambda+\lambda'+\lambda''}\Big) = N(s=g^2+g_1^2+u_1^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}}),$$
$$\Big(g\gtreqless 0,\ g_1\gtreqless 0,\ u_1>0\Big)$$

oder, nach (91.):

$$(92.)\qquad \underset{\big(g\gtreqless 0,\ g_1\gtreqless 0,\ u_1>0\big)}{N(s=g^2+g_1^2+u_1^2;\ (-1)^{\frac{g}{2}})} = \underset{(u>0)}{N(s=u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}}u)}.$$

Dieser Satz entspricht der bekannten Formel:

$$\sum_m(-q)^{m^2}.\sum_n q^{n^2}.\sum_u q^{\frac{u^2}{4}} = \sum_u(-1)^{\frac{u-1}{2}}uq^{\frac{u^2}{4}},\qquad \binom{m,\,n=-\infty,\,\dots,\,+\infty}{u=1,3,5,\dots}$$

oder in der *Jacobi*schen Bezeichnung:

$$\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0) = \frac{1}{\pi}\vartheta_1'(0).$$

Führen wir jetzt die Function ein:

$$(93.)\qquad \bar{\chi}(s) = N(s = g_1^2 + u_1^2) \quad (g_1 \gtreqless 0,\ u_1 > 0)$$

so liefert (92.) die Recursionsformel:

$$(94.)\qquad \Sigma(-1)^{\frac{g}{2}}\bar{\chi}(s-g^2) = N(s = u^2;\ (-1)^{\frac{u-1}{2}}u);\ (u > 0,\ g = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots)$$

Da diese mit der für die Function $\chi(s)$ gefundenen (86.) übereinstimmt, so ist für jede ungerade Zahl s:

$$(95.)\qquad \bar{\chi}(s) = \chi(s),$$

d. h.: Jede ungerade Zahl lässt sich ebenso oft als Summe zweier Quadrate darstellen, als der Ueberschuss der Anzahl ihrer Divisoren von der Form $4n+1$ über die Anzahl ihrer Divisoren von der Form $4n-1$ angiebt. — Dabei sind die beiden Darstellungen $(+g)^2+u^2$ und $(-g)^2+u^2$ als zwei verschiedene, aber für $g = 0$ als eine einzige zu zählen.

Aus jeder Darstellung einer ungeraden Zahl als Summe zweier Quadrate:

$$s = u^2+g^2,$$

folgt eine solche für $2s$:

$$2s = |u+g|^2+|u-g|^2 = u_1^2+u_2^2$$

und umgekehrt. Der Vertauschung von g mit $-g$ entspricht die von u_1 mit u_2. Zählen wir demnach die Darstellungen $u_1^2+u_2^2$ und $u_2^2+u_1^2$ als zwei verschiedene, so besteht der Satz:

Das doppelte jeder ungeraden Zahl s lässt sich als Summe zweier Quadrate (positiver Zahlen) so oft darstellen, als der Ueberschuss der Anzahl ihrer Divisoren von der Form $4n+1$ über die Anzahl ihrer Divisoren von der Form $4n-1$ beträgt:

$$(96.)\qquad N(2s = a^2+b^2) = \chi(s), \quad s \equiv 1 \ (\text{mod.} 2).$$

Dieser Satz entspricht der Formel:

$$(q^{1^2}+q^{3^2}+q^{5^2}+q^{7^2}+\cdots)^2 = \Sigma\chi(u).q^{2u},$$

die von *Jacobi* aus den in den „Fundamenta" p. 103, (5.) und p. 184, (7.) enthaltenen Formeln durch Vergleichung gefolgert wurde (*Jacobi*s ges. Werke Bd. I p. 159, (5.) und p. 235, (7.)).

Jacobi bewies den Satz (96.) später arithmetisch in der Abhandlung „De compositione numerorum e quatuor quadratis", indem er sich dabei auf den schon *Fermat* bekannten speciellen Fall des Satzes für Primzahlen stützte.

Da sich alle Zahlen von den ungeraden und ihren Doppelten nur durch gerade Potenzen von zwei als Factoren unterscheiden, so folgt leicht aus (95.) und (96.), dass allgemein der Satz gilt:

Jede Zahl lässt sich so oft als Summe zweier Quadrate (nicht negativer Zahlen) darstellen, als der Ueberschuss der Anzahl ihrer Factoren von der Form $4n+1$ über die Anzahl ihrer Factoren von der Form $4n-1$ angiebt; bezeichnen wir verallgemeinernd auch diese Function mit $\chi(s)$, so ist also:

$$(97.)\qquad N(s=a^2+b^2)=\chi(s),\quad (a\geqq 0,\ b\geqq 0).$$

Man findet leicht, dass sich die Anzahl $N(s=u_1^2+u_2^2+u_3^2)$ einerseits durch $\sum\limits_u s\chi(s-u^2)$, andererseits durch $\sum\limits_u 3u^2\chi(s-u^2)$ ausdrücken lässt, wodurch man die Formel erhält:

$$(98.)\qquad \sum_u (s-3u^2)\chi(s-u^2) = 0;$$

hier ist s eine ungerade Zahl von der Form $8n+3$.

Bezeichnen wir die Anzahl der primitiven Darstellungen einer Zahl s als Summe zweier Quadrate, d. h. derjenigen Darstellungen, in denen die beiden Quadrate theilerfremd sind, mit $X(s)$, so ist offenbar:

$$(99.)\qquad \chi(s) = \sum_d X\Big(\frac{s}{d^2}\Big),$$

wo die Summe über alle quadratischen Theiler d^2 von s zu erstrecken ist. Denn jeder Darstellung von s, in welcher die beiden Quadrate den grössten gemeinsamen Theiler d^2 haben, entspricht eine und nur eine primitive Darstellung von $\frac{s}{d^2}$.

Ist $s=s_0.p_1^{2a_1}p_2^{2a_2}\dots p_\nu^{2a_\nu}$, $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ prim, s_0 ohne quadratischen Theiler, so wird die Summe

$$\Sigma(-1)^h\chi\Big(\frac{s}{p_{i_1}^2\dots p_{i_h}^2}\Big),\qquad (i_1, i_2, \dots, i_h = 1, 2, \dots, \nu)$$

erstreckt über alle Arten, aus den ν Primzahlquadraten $p_1^2, \dots, p_\nu^2$ irgend h ($h=0, 1, 2, \dots, \nu$) auszuwählen, nach (35.) gleich:

$$\Sigma(-1)^h X\Big(\frac{s}{d^2 p_{i_1}^2\dots p_{i_h}^2}\Big);$$

in dieser Summe kommt irgend ein Glied $X\big(\frac{s}{D^2}\big)$ so oft vor, als die Summe $\Sigma(-1)^h$, erstreckt über alle Möglichkeiten, von D^2 ein Product von h Primzahlquadraten als Factor abzutrennen, angiebt, eine Summe, die offen-

bar verschwindet, wenn D auch nur einen Primfactor enthält, die aber für $D=1$ den Werth Eins annimmt; also ist die Anzahl der primitiven Darstellungen einer Zahl s als Summe zweier Quadrate:

(100.) $$X(s) = \Sigma(-1)^h \chi\left(\frac{s}{p_{i_1}^2 \dots p_{i_h}^2}\right). \quad (p_{i_1}, \dots, p_{i_h} = p_1, p_2, \dots, p_\nu)$$

IV.

Wir wenden uns nunmehr zu der Darstellung der Zahlen als Summen von vier Quadraten. Die Grundlage für diese Untersuchungen bildet der von *Jacobi* aus der Formel:

$$\underset{(u=1,3,5,\dots)}{(\Sigma q^{u^2})^4} = \underset{(s=1,3,5,\dots)}{\Sigma S_d(s) q^{4s}}$$

gefolgerte Satz:

Das Vierfache einer ungeraden Zahl s lässt sich so oft als Summe von vier Quadraten positiver ungerader Zahlen darstellen, als die Divisorensumme von s angiebt. Hier sind zwei Darstellungen als verschieden zu zählen, wenn sie sich auch nur durch die Reihenfolge der Quadrate unterscheiden.

Die obige Formel erhielt *Jacobi* durch Vergleichung der beiden Formeln, welche in den „Fundamenta" pag. 106, (35.) und pag. 184, (7.) (*Jacobis* ges. Werke, Bd. I pag. 162, (35.) und pag. 235, (7.)) zu finden sind. *Jacobi* gab später einen arithmetischen Beweis des betreffenden Satzes in der schon oben citirten Abhandlung „De compositione numerorum e quatuor quadratis" (Werke, Bd. VI, pag. 245—251).

Dieser *Jacobi*sche Beweis ist später von *Dirichlet* vereinfacht worden (*Liouville*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, Série II, tome I[er], pag. 210—214.)

Unsere Art zu schliessen, würde auf denselben oder einen ähnlichen Beweis geführt haben. Wir folgen daher im Wesentlichen der *Dirichlet*schen Darstellung desselben, an der sich noch eine weitere Vereinfachung anbringen lässt.

Die Anzahl:

$$N(4s = u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)$$

stellt sich als die Summe dar:

$$\Sigma N(2s_1 = u_1^2+u_2^2).N(2s_2 = u_3^2+u_4^2),$$

zu erstrecken über alle ungeraden Zahlen s_1 und s_2, deren Summe s_1+s_2

gleich $2s$ ist. Nach (96.) wird diese Anzahl:

$$\sum_{(s_1+s_2=2s)} \chi(s_1)\chi(s_2),$$

d. h. nach (85.):

$$\sum_{\substack{(s_1+s_2=2s)\\(u_1u_1'=s_1,\ u_2u_2'=s_2)}} (-1)^{\frac{u_1-1}{2}}(-1)^{\frac{u_2-1}{2}} = \sum_{(u_1u_1'+u_2u_2'=2s)} (-1)^{\frac{u_1-u_2}{2}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$N\left(2s = u_1'u_1 + u_2'u_2;\ (-1)^{\frac{u_1-u_2}{2}}\right).$$

Zählen wir diejenigen Zerlegungen $2s = u_1'u_1 + u_2'u_2$ besonders, in denen $u_1 = u_2$ ist, so können wir in den übrigen annehmen, dass $u_1 > u_2$ ist, wenn wir ihre Anzahl verdoppeln. Die Anzahl wird also:

$$N(2s = u(u_1'+u_2')) + 2N\left(2s = u_1'u_1 + u_2'u_2;\ (-1)^{\frac{u_1-u_2}{2}}\right).$$

Die erste Anzahl wird gleich:

$$\sum_{uu=s} N\left(u' = \frac{u_1'+u_2'}{2}\right),$$

oder, da

$$N\left(u' = \frac{u_1'+u_2'}{2}\right) = u'$$

ist, gleich:

$$\sum_{uu'=s} u' = S_u(s).$$

In der zweiten Anzahl setzen wir:

$$\frac{u_1-u_2}{2} = a, \quad \frac{u_1'+u_2'}{2} = b,$$

so dass $2b - u_1' > 0$ ist, dann wird dieselbe:

$$N(s = a u_1' + b u_2;\ (-1)^a).$$

Betrachten wir $au_1' + bu_2 = s$ als Gleichung zur Bestimmung von u_1' und u_2, so besitzt dieselbe bekanntlich, wenn sie überhaupt in positiven ungeraden Zahlen u_1', u_2 auflösbar ist, eine und nur eine reducirte Auflösung, in welcher $u_1' < 2b$ ist. Ordnen wir je zwei zu (a, b) und (b, a) gehörige reducirte Darstellungen von s einander zu, so liefern dieselben zu der Anzahl den Beitrag $(-1)^a + (-1)^b$, welcher verschwindet, weil von den beiden Zahlen au_1' und bu_2, also auch von den beiden Zahlen a und b die eine gerade, die andere ungerade sein muss. Mithin ist:

$$N(s = au_1' + bu_2;\ (-1)^a) \quad (u_1' < 2b)$$

gleich Null, also für $s \equiv 1 \pmod{2}$:

$$(101.)\qquad N(4s = u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2) = S_d(s), \quad (u_1>0,\ u_2>0,\ u_3>0,\ u_4>0)$$

wie oben bereits ausgesprochen wurde. Hieraus können wir eine der Recursionsformel (98.) analoge Formel für die Divisorensummen ableiten. Denn zählen wir jede von den Zerlegungen einer Zahl $8s+5$ in eine Summe von fünf ungeraden Quadraten u^2-mal, wenn sie das Quadrat u^2 an einer der fünf Stellen enthält, so wird die Gesammtanzahl einerseits durch $(8s+5)\sum\limits_u S_a\left(\frac{8s+5-u^2}{4}\right)$, andererseits durch $5\sum\limits_u u^2 S_d\left(\frac{8s+5-u^2}{4}\right)$ ausgedrückt. Setzen wir $u = 2k+1$, so folgt daraus:

$$(102.)\qquad \sum_k \left(s-5\frac{k(k+1)}{2}\right)\cdot S_d(2s+1-k(k+1)) = 0,$$

eine Recursionsformel für die Divisorensummen ungerader Zahlen. Für gerade Zahlen $2^a u$ wird:

$$S_d(2^a u) = (2^{a+1}-1)S_d(u).$$

Die Formel (102.) ist von *Liouville* aus der Gleichung:

$$\left(\sum q^{\frac{k(k+1)}{2}}\right)^4 = \sum S_d(2s+1).q^s \qquad (k,\ s = 0,1,2,\ldots)$$

gefolgert worden, die aus der oben citirten unmittelbar folgt. (*Liouvilles* Journal Sér. II, Bd. I pag. 349—350.)

Es ist im Folgenden nothwendig, bei der Darstellung der Zahlen als Summen von vier Quadraten $a^2+b^2+c^2+d^2$ für a, b, c, d positive, negative und verschwindende Werthe zuzulassen. Wir wollen daher (101.) in die Form setzen:

$$(103.)\qquad N(4s = u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2) = 16S_d(s), \quad s\equiv 1 \pmod{2}.$$
$$(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \gtrless 0)$$

Wir suchen jetzt die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl s als Summe von vier Quadraten $a^2+b^2+c^2+d^2$. Da von den Zahlen a, b, c, d eine oder drei ungerade sein müssen, folgen aus jeder Darstellung von s:

$$s = a^2+b^2+c^2+d^2$$

zwei Darstellungen von $4s$:

$$4s = u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2,$$

nämlich:

$$4s = (a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2,$$
$$4s = (-a+b+c+d)^2+(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2+(a+b+c-d)^2.$$

Umgekehrt folgt aber aus jeder Darstellung von $4s$: $4s = u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2$ eine Darstellung von s: $s = a^2+b^2+c^2+d^2$; und zwar muss man setzen, wenn $u_1+u_2+u_3+u_4$ durch 2 aber nicht durch 4 theilbar ist: $-a+b+c+d = u_1$ etc., woraus folgt:

$$2a = \frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{2} - u_1, \quad \text{etc.};$$

ist aber $u_1+u_2+u_3+u_4$ durch 4 theilbar, so setze man: $a+b+c+d = u_1$ etc., daraus folgt:

$$a = \frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{4} \quad \text{etc.}$$

Dadurch sind die Zerlegungen $s = a^2+b^2+c^2+d^2$ und $4s = u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2$ einander ein-zweideutig zugeordnet: also ist:

$$N(4s = u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2) = 2N(s = a^2+b^2+c^2+d^2).$$

d. h. nach (103.):

$$(104.) \qquad N(s = a^2+b^2+c^2+d^2) = 8S_d(s), \quad s \equiv 1 \ (\text{mod.}\,2), \quad (a, b, c, d \gtreqless 0)$$

Daraus folgt:

$$N(4s = g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_4^2) = 8S_d(s), \quad s \equiv 1 \ (\text{mod.}\,2); \quad (g_1, g_2, g_3, g_4 \gtreqless 0)$$

also durch Verbindung mit (103.), wenn wir bedenken, dass in den Darstellungen von $4s$ als Summe von vier geraden und als Summe von vier ungeraden Quadraten alle Darstellungen von $4s$ als Summe von vier Quadraten enthalten sind:

$$(105.) \qquad N(4s = a^2+b^2+c^2+d^2) = 24S_d(s), \quad s \equiv 1 \ (\text{mod.}\,2), \quad (a, b, c, d \gtreqless 0)$$

Aus jeder Darstellung von $4s$ als Summe von vier Quadraten: $4s = a^2+b^2+c^2+d^2$ folgt aber eine von $2s$:

$$2s = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2,$$

und umgekehrt, also ist auch:

$$(106.) \qquad N(2s = a^2+b^2+c^2+d^2) = 24S_d(s), \quad s \equiv 1 \ (\text{mod.}\,2), \quad (a, b, c, d \gtreqless 0)$$

Da sich nun alle geraden Zahlen aus den Doppelten und Vierfachen der ungeraden Zahlen durch Hinzufügung einer geraden Potenz von 2 als Factor ergeben, so folgt unschwer aus (105.) und (106.):

$$(107.) \qquad N(s = a^2+b^2+c^2+d^2) = 24S_d(s), \quad s \equiv 0 \ (\text{mod.}\,2), \quad (a, b, c, d \gtreqless 0)$$

Bezeichnen wir mit $N(s)$ die Anzahl $N(s=a^2+b^2+c^2+d^2)$, $(a, b, c, d \gtreqless 0)$, mit $\overline{N}(s)$ die Anzahl der primitiven Darstellungen von s als Summe von vier Quadraten, so ist wie in (99.):

$$(108.)\qquad N(s) = \Sigma \overline{N}\left(\frac{s}{d^2}\right),$$

die Summe erstreckt über alle quadratischen Theiler d^2 von s. Ebenso wie (100.) ergiebt sich:

$$(109.)\qquad \overline{N}(s) = \Sigma(-1)^h N\left(\frac{s}{p_{i_1}^2 \dots p_{i_h}^2}\right),$$

wo die Summe zu erstrecken ist über alle Möglichkeiten, h Primzahlquadrate von s als Factoren abzutrennen.

Wir führen jetzt die Bezeichnung ein:

$$\begin{aligned}
&N(s=a^2+b^2+c^2+d^2) = \varphi_1, \\
&\quad (0<a<b<c<d) \\
&N(s=a^2+b^2+2c^2) = \varphi_2, \\
&\quad (0<a<b;\ 0<c;\ a \neq c;\ b \neq c) \\
&N(s=2a^2+2b^2) = \varphi_{2,2}, \\
&\quad (0<a<b) \\
&N(s=a^2+3b^2) = \varphi_3, \\
&\quad (0<a;\ 0<b;\ a \neq b) \\
&N(s=4a^2) = \varphi_4, \\
&\quad (0<a) \\
&N(s=a^2+b^2+c^2) = \varphi_1', \\
&\quad (0<a<b<c) \\
&N(s=a^2+2b^2) = \varphi_2', \\
&\quad (0<a;\ 0<b;\ a \neq b) \\
&N(s=3a^2) = \varphi_3', \\
&\quad (0<a) \\
&N(s=a^2+b^2) = \varphi_1'', \\
&\quad (0<a<b) \\
&N(s=2a^2) = \varphi_2'', \\
&\quad (0<a) \\
&N(s=a^2) = \varphi_1''', \\
&\quad (0<a)
\end{aligned}$$

indem wir der Kürze halber das Argument, welches im Folgenden immer gleich s ist, fortlassen.

Bei richtiger Abzählung der Zerlegungen wird jetzt:

$$(110.)\quad \begin{cases} N(s=a^2+b^2+c^2+d^2) = 24.2^4\varphi_1+12.2^4\varphi_2+6.2^4\varphi_{2,2}+4.2^4\varphi_3+24.2^3\varphi_1' \\ \quad (a,b,c,d \gtreqless 0) \\ \qquad\qquad +12.2^3\varphi_2'+4.2^3\varphi_3'+12.2^2\varphi_1''+6.2^2\varphi_2''+4.2\varphi_1'''. \end{cases}$$

Ist jetzt s eine ungerade Primzahl, so wird: $\varphi_{2,2}=\varphi_4=\varphi_3'=\varphi_2''=\varphi_1'''=0$, also folgt aus (104.):

$$(111.)\qquad \tfrac{1}{2}S_d(s) = 24\varphi_1+12\varphi_2+4\varphi_3+12\varphi_1'+6\varphi_2'+3\varphi_1''.$$

Wir betrachten der Reihe nach die vier Fälle, dass s eine Primzahl von der Form $4n+1$, $8n+1$, $8n+3$, $6n+1$ ist.

Ist erstens $s=4n+1$, so ist $\frac{1}{2}S_d(s)=2n+1$, also folgt aus (111.), dass φ_1'' ungerade ist, d. h. jede Primzahl von der Form $4n+1$ lässt sich auf wenigstens eine Art als Summe zweier Quadrate darstellen. Dass sie sich nicht auf mehr als eine Art so darstellen lässt, ist leicht zu zeigen; denn wäre: $s=u^2+g^2=u_1^2+g_1^2$, so würde aus

$$\frac{u+u_1}{2}\cdot\frac{u-u_1}{2} = \frac{g_1+g}{2}\cdot\frac{g_1-g}{2}$$

folgen, dass $\frac{u+u_1}{2}$ in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine in $\frac{g_1+g}{2}$, der andere in $\frac{g_1-g}{2}$ enthalten sein muss; also

$$\frac{u+u_1}{2} = aa_1,\quad \frac{g+g_1}{2} = ab_1,$$

$$\frac{u-u_1}{2} = bb_1,\quad \frac{g_1-g}{2} = a_1b,$$

woraus folgt:

$$u = aa_1+bb_1,$$
$$g = ab_1-a_1b,$$
$$s = (aa_1+bb_1)^2+(ab_1-a_1b)^2 = (a^2+b^2).(a_1^2+b_1^2),$$

so dass s keine Primzahl sein könnte.

Ist zweitens $s=8n+1$ (prim), so ist nach dem Vorhergehenden $\varphi_1''=1$; und da $\frac{1}{2}S_d(s)=4n+1$ wird, folgt aus (111.):

$$2n-1 = 12\varphi_1+6\varphi_2+2\varphi_3+6\varphi_1'+3\varphi_2',$$

d. h. $\varphi_2'\equiv 1 \pmod 2$, also nicht Null. Da man wie oben zeigen kann, dass eine Primzahl sich nicht auf mehr als eine Art in der Form a^2+2b^2 darstellen lassen kann, so ist:

$$N(s=a^2+2b^2)=1,\quad s=8n+1 \text{ prim}.$$

Ist drittens $s = 8n+3$ (prim), so ist $\varphi_1'' = 0$, $\frac{1}{2}S_d(s) = 4n+2$, also nach (111.):

$$2n+1 = 12\varphi_1+6\varphi_2+2\varphi_3+6\varphi_1'+3\varphi_2',$$

d. h. $\varphi_2' \equiv 1 \pmod 2$, woraus wie oben folgt:

$$N(s = a^2+2b^2) = 1, \quad s = 8n+3 \text{ prim.}$$

Ist viertens $s = 6n+1$ (prim), so ist $\frac{1}{2}S_d(s) = 3n+1$, also nach (111.):

$$3n+1 = 24\varphi_1+12\varphi_2+4\varphi_3+12\varphi_1'+6\varphi_2'+3\varphi_1'';$$

daraus folgt: $\varphi_3 \not\equiv 0 \pmod 3$, und, wie früher:

$$N(s = a^2+3b^2) = 1, \quad s = 6n+1 \text{ prim.}$$

Um weitere Schlüsse zu ziehen, wollen wir zunächst zeigen, dass jede ungerade Zahl s_0, welche eine Zahl von der Form $a_1^2+\varepsilon b_1^2$ ($\varepsilon = 1, 2, 3$) theilt, und zu a_1 und b_1 relativ prim ist, selbst in der betreffenden Form $a^2+\varepsilon b^2$ enthalten sein muss. Denn ist $s_0 s_1 = a_1^2+\varepsilon b_1^2$, so können wir annehmen, dass a_1, b_1 bereits auf ihre absolut kleinsten Reste (mod s_0) reducirt sind, dass also $|a_1| < \frac{s_0}{2}$, $|b_1| < \frac{s_0}{2}$ ist. Daraus folgt: $s_0 s_1 < \frac{1+\varepsilon}{4} s_0^2$, also in jedem der drei Fälle $\varepsilon = 1, 2, 3: s_1 < s_0$.

Reduciren wir jetzt a_1, b_1 (mod s_1) auf ihre absolut kleinsten Reste a_2, b_2, und wird dadurch $s_1 s_2 = a_2^2+\varepsilon b_2^2$, so ist auch $s_2 < s_1$; aber aus:

$$a_1 \equiv a_2, \quad b_1 \equiv b_2 \pmod{s_1}$$

folgt:

$$a_1 a_2+\varepsilon b_1 b_2 \equiv a_1^2+\varepsilon b_1^2 \equiv 0 \pmod{s_1}$$

und:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \equiv 0 \pmod{s_1};$$

also wird

$$s_0 s_1 . s_1 s_2 = (a_1^2+\varepsilon b_1^2)(a_2^2+\varepsilon b_2^2) = (a_1 a_2+\varepsilon b_1 b_2)^2+\varepsilon(a_1 b_2-a_2 b_1)^2$$

durch s_1^2 theilbar, so dass $s_0 s_2 = a^2+\varepsilon b^2$ wird, wo $s_2 < s_1$ ist. Fahren wir mit der Reduction weiter fort, so wird das letzte Glied der abnehmenden Reihe $s_1, s_2, s_3, \dots$ schliesslich gleich Eins. Dann ist s_0 in der Form $a^2+\varepsilon b^2$ dargestellt. Eine ungerade Zahl von der Form $a^2+\varepsilon b^2$ hat also für $\varepsilon = 1$ nur Theiler von der Form $4n+1$, für $\varepsilon = 2$ nur solche von den Formen $8n+1$, $8n+3$, für $\varepsilon = 3$ nur solche von der Form $6n+1$, abgesehen von einem beliebigen quadratischen Factor. Die geraden Zahlen erhält man aus diesen durch Hinzufügen einer Potenz von 2, deren Ex-

ponent jedoch für $\varepsilon = 3$ gerade sein muss. Dadurch sind wir in den Stand gesetzt, alle in den drei Formen a^2+b^2, a^2+2b^2, a^2+3b^2 enthaltenen Zahlen anzugeben, und auch die Anzahl der Darstellungen ist leicht zu berechnen.

Kehren wir jetzt zu der Formel (110.) zurück und schliessen wir alle Zahlen von der Form $a^2+\varepsilon b^2$ ($\varepsilon = 1, 2, 3$) auch für verschwindende Werthe von a aus, so ist für jede andere Zahl s:

$$\varphi_{2,2} = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_2' = \varphi' = \varphi_1'' = \varphi_2'' = \varphi_1''' = 0,$$

also: $\frac{\delta}{24} S_u(s) = 2\varphi_1+\varphi_2+\varphi_1'$; $\delta = 1$ oder 3, je nachdem s ungerade ist oder nicht. Wir suchen diejenigen Zahlen, für welche $\varphi_2+\varphi_1'$, also auch $\frac{\delta}{24}\cdot S_u(s)$ ungerade ist. Da s nicht in einer der Formen $a^2+\varepsilon b^2$ enthalten sein darf, so enthält es entweder eine ungerade Potenz einer in keiner der Formen $4n+1$, $8n+1$, $8n+3$, $6n+1$ enthaltenen Primzahl p, oder es enthält ungerade Potenzen zweier Primzahlen p und q, die nicht beide zugleich in einer und derselben der drei Zahlenarten

$$1)\ 4n+1, \quad 2)\ 8n+1,\ 8n+3, \quad 3)\ 6n+1$$

enthalten sind.

Im ersten Falle kann der betreffende Primfactor p nur von der Form $24n-1$ sein. Ist $s = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$, so wird $S_d(s)$ bekanntlich gleich:

$$(1+p+p^2+\cdots+p^\alpha)(1+q+q^2+\cdots+q^\beta)(1+r+r^2+\cdots+r^\gamma)\cdots,$$

also, da α ungerade gleich $2\alpha'+1$ ist:

$$(1+p)(1+p^2+p^4+\cdots+p^{2\alpha'})(1+q+\cdots+q^\beta)(1+\cdots+r^\gamma)\cdots.$$

Da ferner $p = 24n-1$ ist, so wird $\frac{\delta}{24} S_u(s)$ ungerade dann und nur dann, wenn n ungerade $= 2m+1$, α' gerade $= 2\alpha$, und alle übrigen Exponenten β, γ etc. gerade sind. Also für $s = p^{4\alpha+1}.R^2$, $p = 48m+23$ prim, ist $\varphi_2+\varphi_1' \equiv 1 \pmod 2$.

Im zweiten Falle hat s die Form: $s = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$, wo α und β ungerade, p und q zwei nicht in derselben der drei Zahlenarten:

$$\begin{aligned}&1)\ 24n+1,\ 24n+5,\ \ 24n+13,\ 24n+17,\\ &2)\ 24n+1,\ 24n+11,\ 24n+17,\ 24n+19,\\ &3)\ 24n+1,\ 24n+7,\ \ 24n+13,\ 24n+19\end{aligned}$$

enthaltene Primzahlen sind.

Folgende sechs Fälle sind möglich:

$$\begin{array}{ll}
1)\ p = 24m+5, & q = 24n+7,\\
2)\ p = 24m+5, & q = 24n+11,\\
3)\ p = 24m+5, & q = 24n+19,\\
4)\ p = 24m+7, & q = 24n+11,\\
5)\ p = 24m+7, & q = 24n+17,\\
6)\ p = 24m+11, & q = 24n+13;
\end{array}$$

$$\frac{\delta}{24} S_u(s) = \frac{\delta}{24}(1+p+\cdots+p^\alpha)(1+q+\cdots+q^\beta)(1+r+\cdots+r^\gamma)\cdots,$$

oder, $\alpha = 2\alpha'+1$, $\beta = 2\beta'+1$ gesetzt:

$$\frac{\delta}{24} S_u(s) = \frac{\delta}{24}(1+p)(1+q)(1+p^2+\cdots+p^{2\alpha'})(1+q^2+\cdots+q^{2\beta'})(1+r+\cdots+r^\gamma)\cdots;$$

dieser Ausdruck kann wegen des Factors $\frac{(1+p)(1+q)}{24}$ nur im zweiten, dritten und sechsten der obigen sechs Fälle ungerade werden. Damit $\frac{\delta}{24} S_u(s)$ ungerade wird, ist ausserdem erforderlich, dass α', β', γ ... gerade werden. Indem wir diese drei Fälle mit dem Obigen zusammenfassen, können wir den Satz aussprechen:

Die nicht in der Form $a^2+\varepsilon b^2$ ($\varepsilon = 1, 2, 3$) enthaltenen Zahlen besitzen im allgemeinen eine gerade Anzahl von Darstellungen in der Form $a^2+b^2+\varepsilon c^2$ ($\varepsilon = 1, 2$); eine ungerade Anzahl besitzen nur die Zahlen von der Form $p^{4\alpha+1}.q^{4\beta+1}.2^\gamma.R^2$, wo p und q Primzahlen sind und einer der vier Fälle stattfindet:

$$\begin{array}{ll}
p = 48m+23, & q = 1,\\
p = 24m+5, & q = 24n+11,\\
p = 24m+5, & q = 24n-5,\\
p = 24m+11, & q = 24n-11.
\end{array}$$

Beachten wir, dass jeder Darstellung der Zahl s:

$$s = a^2+b^2+2c^2 \quad (0 < a < b;\ 0 < c;\ a \neq c,\ b \neq c)$$

eine solche von $2s$:

$$2s = a_1^2+b_1^2+c_1^2, \qquad (0 < a_1 < b_1;\ 0 < c_1)$$

nämlich:

$$2s = (b-a)^2+(b+a)^2+(2c)^2$$

5*

ein-eindeutig oder ein-dreideutig zuzuordnen ist, so können wir den obigen Satz auch so aussprechen:

Eine nicht in der Form $a^2+\varepsilon b^2$ ($\varepsilon = 1, 2, 3$) enthaltene (also insbesondere jede in der Form $24n-1$ enthaltene) Zahl und ihr Doppeltes besitzen im allgemeinen eine gerade Anzahl von Darstellungen in der Form $a^2+b^2+c^2$ $(0 < a < b < c)$; eine ungerade Anzahl besitzen nur die oben angegebenen vier Zahlengruppen.

Aus der Gleichung (110.) ist für gerade s noch ein anderes Resultat zu ziehen. Betrachten wir dieselbe modulo 3, so ergiebt sich, da $\varphi_4 = \varphi_1'''$ ist: $8\varphi_3+4\varphi_3' \equiv 0$ (mod. 3). Ist zunächst s nicht das Dreifache eines Quadrates, so ist $\varphi_3' = 0$, also $\varphi_3 \equiv 0$ (mod. 3). Ist $s = 3a^2$, also $= 12c^2$, so ist $\varphi_3' = 1$, also $\varphi_3 \equiv 1$ (mod. 3). Schliessen wir aber die Darstellung $12c^2 = (3c)^2+3.c^2$ aus, so ist auch in diesem Falle, d. h. für jede gerade Zahl, $\varphi_3 \equiv 0$ (mod. 3). Aber für $s = 2^{2\gamma+1}.u$ ist $\varphi_3 = 0$; und für $s = 2^{2\gamma}u$ folgt aus jeder Darstellung von s als a^2+3b^2, da a und b durch $2^{\gamma-1}$ theilbar sein müssen, eine solche von $4u$; also:

$$N(4u = a^2+3b^2) \equiv 0 \;\; (\text{mod.}\, 3); \qquad (a, b, |a-b|, |a-3b| > 0)$$

z. B.

$$4.7 = 1^2+3.3^2 = 4^2+3.2^2 = 5^2+3.1^2,$$
$$4.13 = 2^2+3.4^2 = 5^2+3.3^2 = 7^2+3.1^2.$$

Unsere Untersuchungen, die wir hiermit vorläufig abschliessen wollen, rechtfertigen in ihren Methoden und Resultaten den vorgesetzten Titel. Namentlich zeigt sich dies bei den grundlegenden Sätzen; z. B. beruht der Beweis der Sätze (64.) ff. nicht auf der Eigenschaft eines Quadrates h^2, sich als Product zweier gleichen Zahlen, sondern sich als die Summe $1+3+5+\cdots+(2h-1)$ darstellen zu lassen.

Zusatz zur Abhandlung: „Zerfällung der lemniskatischen Theilungsgleichung in vier Factoren“.

(Dieses Journal Band 110, S. 42.)

(Von Herrn *K. Schwering* in Düren.)

Die Theilungsgleichung $\varphi_\eta(x^4)=0$ besitzt, wenn man $x^4=z\pm 1$ setzt, die Eigenschaft, dass ihre Coefficienten der Reihe nach durch gewisse Potenzen von $1+i$ theilbar werden. Man sehe Seite 44, 46, 69 und die Formeln (7.) und (7ª.) obiger Abhandlung. Für diese wichtige Eigenschaft der Theilungsgleichung kann man einen zweiten Beweis führen, der dieselbe als Folge einer bemerkenswerthen Umformung der Gleichung erscheinen lässt. Ich will den Beweis kurz andeuten wie folgt:

1) Die Gleichungen (6.) und (6ª.) zeigen, dass für jede ungerade primäre Zahl η die Multiplication bewerkstelligt werden kann durch einen Ausdruck von der Form:

$$(1+i)^m\varphi_\eta(x^4) = H(t,\ u),$$

wo H eine *homogene* ganze ganzzahlige Function der Grössen

$$t=x^4-1+2i,\quad u=1+(-1+2i)x^4$$

ist vom Grade $\mu=\frac{q-1}{4}$; $q=N(\eta)$.

2) $H(t,u)$ verschwindet also für alle Werthe $x^4=\gamma_r^4$, folglich für

$$\frac{t}{u}=\frac{\gamma_r^4-1+2i}{1+(-1+2i)\gamma_r^4}=\frac{\gamma_{r+\mathrm{ind}(-1+2i)}}{\gamma_r}.$$

Die Gleichung $P=0$, deren Wurzeln diese Quotienten für $r=0,1,\dots,\mu-1$ sind, ist ganzzahlig und vom Grade μ. $H(t,u)$ unterscheidet sich also von $u^\mu P\left(\frac{t}{u}\right)=H_1(t,u)$ nur durch einen Zahlfactor.

Dieser Zahlfactor ist unter der Annahme $\frac{t}{u}=1$ durch Bestimmung

des Productes

$$\Pi_r\Big(1-\frac{\gamma_r^4-1+2i}{1+(-1+2i)\gamma_r^4}\Big)$$

(mit Hülfe der Abh. des Verf. dies. Journ. Bd. 107 Gl. 66 und 89) leicht als eine Potenz von $1+i$ erweisbar, und so folgt

$$(1+i)^\mu \varphi_{\gamma_i}(x^4) = i^\delta(t^\mu + a_1 t^{\mu-1}u + a_2 t^{\mu-2}u^2+\cdots),$$

wo δ eine reelle und a_1, a_2 u. s. w. complexe ganze Zahlen sind.

3) Hiermit sind die genannten Sätze bewiesen, wie sich aus den Gleichungen

$$x^4-1 = z = t-2i, \qquad u = (-1+2i)z+2i;$$
$$x^4+1 = z = t+2+2i, \quad u = (-1+2i)z+2-2i;$$
$$x^4-1-2i = z = t-4i, \quad u = (-1+2i)z-4$$

sofort ergiebt.

Ueber windschiefe Flächen vierten Grades mit drei Doppelgeraden.*)

(Von Herrn *D. Segen* in Agram.)

1. Jede windschiefe Fläche kann als Ort von Geraden angesehen werden, die einander zugeordnete Punkte auf zwei Curven C_p und $C_{p'}$ verbinden (p und p' mögen die respectiven Ordnungszahlen sein). Man ordne nämlich jedem Punkte auf C_p m' Punkte auf $C_{p'}$ zu, und umgekehrt werden jedem Punkte auf $C_{p'}$ m Punkte der C_p als zugeordnet gedacht.

Diesen allgemeinen Standpunkt benutzend, erzeugt man auf folgende Weise windschiefe Flächen mit drei Doppelgeraden.

Es sei in der Ebene α ein Kegelschnitt C_2 gegeben; ferner nehme man eine Gerade g an, doch — der Allgemeinheit wegen — so, dass ihr Durchschnittspunkt $(g\alpha) \equiv A$ nicht auf der Curve C_2 sei. Der Punktreihe g ordne man projectivisch eine quadratische Punktinvolution P', P'' auf der C_2 zu, deren Pol B irgend ein Punkt der Ebene α sei. Die Zuordnung sei aber so hergestellt, dass dem Durchschnittspunkte $(g\alpha) \equiv A$, als Punkt der Reihe g gedacht, jenes Paar A', A'' in der Involution entspreche, welches mit A auf einem Strahle liegt. Es schneide also die Gerade AB den Kegelschnitt in dem Paare A', A''. *Die Verbindungsgeraden eines laufenden Punktes P der Reihe g mit den entsprechenden Paaren P', P'' in der Involution auf C_2 erzeugen eine windschiefe Fläche Φ.*

Es ist nun unmittelbar Folgendes ersichtlich:

a) Die Gerade g ist eine Doppelleitlinie der Fläche.

*) Im CIV. Bande der südslavischen Akademie der Wissenschaften und Künste zu Agram erschien von demselben Verfasser eine Abhandlung in kroatischer Sprache, in welcher der Grundgedanke dieser enthalten ist. Vorliegendes ist theilweise eine Wiedergabe in etwas abgekürzter Fassung, theilweise wurde manches ergänzt und in anderer Art dargestellt.

b) Die Gerade $AB \equiv d$ hingegen ist eine Doppelerzeugende auf der Fläche, da sich in ihr zwei Erzeugende AA' und AA'' vereinigen.

c) Der Kegelschnitt C_2 ist aber eine einfache Curve auf der Fläche.

d) Die Involution J_B auf der Curve (es sei hiermit jene bezeichnet, deren Pol der Punkt B ist) besitzt zwei Ordnungs- oder Doppelpunkte M' und N', die reell, zusammenfallend reell, oder auch imaginär sein können. Jedenfalls entsprechen den Ordnungspunkten M', N' respective zwei Punkte M, N der Punktreihe g, über deren Realität wir uns erst später Rechenschaft geben werden.

Die Verbindungsgeraden MM' und NN' müssen als singuläre Erzeugende angesehen werden, denn längs ihnen ist die Fläche nicht windschief, sondern sie besitzt die bestimmenden Merkmale der abwickelbaren Flächen. In jeder singulären Erzeugenden nämlich vereinigen sich zwei unendlich nahe benachbarte Flächenerzeugende, wodurch sich eben diese singulären Erzeugenden auch von der Doppelgeraden unterscheiden.

e) Bezeichnen wir mit t_1 und t_2 die aus dem Pole B möglichen Curventangenten an C_2, so ist ersichtlich, dass die Ebenen $\varepsilon_1 = \equiv (Mt_1)$ und $\varepsilon_2 \equiv (Nt_2)$ die Fläche Φ längs der respectiven singulären Erzeugenden berühren. Diese dadurch besonders ausgezeichneten Ebenen sind die *Cuspidalebenen* der Fläche.

f) Es ist nun sicher, dass die Cuspidalebenen ε_1, ε_2 und die beiden Cuspidalpunkte M, N, wie auch die singulären Erzeugenden MM' und NN' nur dann reell sein können, falls es auch die Doppelpunkte M', N' der Involution J_B sind.

2. Um weitere Eigenschaften der Fläche Φ aufzufinden, bemerken wir, dass der Pol B der Scheitel eines in der Ebene α sich befindenden Strahlenbüschels σ ist, und dass sich auf jedem Strahle ein Punktepaar der Involution J_B befindet. Projiciren wir aus dem Punkte B auch die Punktreihe, deren Träger die Gerade g ist, so entsteht dadurch ein in der Ebene (Bg) liegender zweiter Strahlenbüschel σ_1, der mit dem erstgenannten Strahlenbüschel σ nicht nur projectivisch ist, sondern sich in perspectiver Lage befindet, da sie beide den Strahl BA gemeinsam entsprechend haben. Solche Büschel sind stets als Schnitte eines Ebenenbüschels mit ihren respectiven Ebenen — hier mit den Ebenen α und (Bg) — aufzufassen. Die Axe h dieses Ebenenbüschels ist leicht auffindbar. Sie ergiebt sich als Schnitt der Ebenen $PP'P''$ und $MM'B$. Dieser Ebenenbüschel mit der Axe h steht

nun ebenfalls in ganz besonderer Beziehung zur Fläche Φ. Jede seiner Ebenen enthält zwei Flächenerzeugende PP' und PP''; sie ist daher eine *Doppeltangentialebene,* und ihre Berührungspunkte P_1' und P_1'' ergeben sich als Schnitte der in ihr enthaltenen Erzeugenden mit der Axe h. Wir erkennen daher, dass die Punkte der Punktreihe g biplanare Punkte der Fläche sind, deren Tangentenebenen durch g und den aus jedem Punkte ausgehenden Flächenerzeugenden bestimmt sind; dass hingegen der Büschel mit der Axe h aus lauter Doppeltangentialebenen der Fläche besteht.

Eine besondere Stellung beanspruchen die Cuspidalpunkte M, N der Punktreihe g und die Cuspidalebenen ε_1, ε_2 des Ebenenbüschels mit der Axe h. Jene sind *uniplanar,* ε_1 und ε_2 hingegen berühren die Fläche Φ längs der singulären Erzeugenden.

Im übrigen möge bemerkt werden, dass die Punktreihe auf g und der Ebenenbüschel mit der Axe h sich in perspectiver Lage befinden.

3. Um nun die besondere Stellung der Axe h noch weiter zu erkennen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Ordnet man der Punktreihe Q, R, ... auf der Geraden h (diese Punkte wurden schon vorher mit P_1' und P_1'' bezeichnet) abermals Punktepaare einer bestimmten quadratischen Punktinvolution J_A auf demselben Kegelschnitte C_2 zu, indem wir erstens den Punkt A als Pol annehmen und zweitens festsetzen, dass dem Punkte $(h\alpha) \equiv B$ das Paar A', A'' entsprechen möge, drittens aber, dass dem Punkte Q das Paar Q', Q'' (wo Q' mit P' identisch sei), dem Punkte R hingegen das Paar $R'R''$, wo R' wieder mit P'' identisch sei, zugeordnet werde, *so werden die Verbindungsgeraden der Punkte auf h mit den respectiven Punktepaaren der Involution abermals die vorher schon erhaltene windschiefe Fläche Φ erzeugen.* Projicirt man nämlich aus A die Punktreihe auf h und die Involution J_A, so entstehen in den Ebenen (Ah) und α abermals zwei in perspectiver Lage sich befindende Strahlenbüschel τ und τ_1, da die Strahlenbüschel den Strahl AB abermals entsprechend gemein haben. Diese Strahlenbüschel τ und τ_1 können nun abermals als Schnitte eines Ebenenbüschels mit den respectiven Ebenen (Ah) und α angesehen werden und es ist klar, dass die vorher angenommene Gerade g, die Axe dieses Ebenenbüschels sein muss. Diese Gerade g verbindet ja wirklich den gemeinsamen Scheitel A der Büschel τ und τ_1 mit einem gemeinschaftlichen Punkte entsprechender Ebenen AQQ' und ARR'.

Die Stellung des Ebenenbüschels mit der Axe g ist nun der Fläche

gegenüber genau dieselbe, wie jene des früher betrachteten Ebenenbüschels mit der Axe h. Eine jede seiner Ebenen ist Doppeltangentialebene, denn sie enthält zwei Flächenerzeugende, deren Schnitte mit der Axe g die beiden Berührungspunkte der betreffenden Ebene ergeben.

Die Punkte der Geraden h sind biplanare Punkte, da aus jedem abermals zwei Flächenerzeugende ausgehen, die mit h die beiden zugehörigen Tangentenebenen bestimmen.

Es sind also g wie h Doppelgerade der Fläche und gleichzeitig Axen von Ebenenbüscheln, deren Ebenen Doppeltangentialebenen der Fläche sind.

Nun besitzt die Involution J_A auch zwei Ordnungspunkte K', L', die reell oder imaginär sein können; die ihnen in der Punktreihe mit dem Träger g entsprechenden Punkte seien K und L. Die Verbindungsgeraden KK', LL' sind abermals zwei singuläre Flächenerzeugende, und die Ebenen $\varepsilon_3 \equiv (Kt_3)$ und $\varepsilon_4 \equiv (Lt_4)$ sind auch Cuspidalebenen, die Punkte K, L sind ebenfalls Cuspidalpunkte. (t_3, t_4 seien die aus A gezogenen Tangenten des Kegelschnittes C_2). *Die Fläche Φ besitzt also vier Cuspidalelemente.* Die Punkte A, B wollen wir Knotenpunkte benennen. In ihnen schneidet die *Doppelgerade d* die beiden *Doppelleitlinien g* und h der Fläche Φ.

4. Als unmittelbare Folge der Construction beider Cuspidalebenen jedes Doppeltangentialebenenbüschels folgt, dass diese ausgezeichneten Ebenen den Büschel, dem sie angehören, in zwei Theile derart zerlegen, dass jede Ebene innerhalb der Cuspidalebenen zwei reelle Flächenerzeugende enthält; jede Ebene ausserhalb ihres Flächenwinkels aber nur imaginäre Flächenerzeugende enthalten kann.

Die Cuspidalpunkte hingegen bestimmen auf den Doppelleitgeraden eine endliche Strecke, die als *eigentliche* Doppelleitlinie gelten muss, da aus jedem ihrer Punkte zwei reelle Erzeugende ausgehen. Die Theile ausserhalb der Cuspidalpunkte sind aber nur als *uneigentliche* Doppelleitlinien anzusehen. Man entnimmt, dass die Realität der Cuspidalpunkte in innigem Zusammenhange mit der Realität der Ordnungspunkte beider Involutionen J_A und J_B steht. Sind diese Ordnungspunkte reell, so sind es auch die Cuspidalelemente; sind hingegen diese imaginär, so sind es auch jene Cuspidalelemente, die mit den betreffenden Ordnungspunkten zusammenhängen. Und es ist also möglich, dass eine oder auch beide Doppelleitlinien, ihrer ganzen Länge nach, als eigentlich der Fläche angehörend anzusehen sind.

Auch die Doppelerzeugende d kann als eigentliche oder uneigent-

liche — ideelle — Flächenerzeugende auftreten, doch ist sie es stets ihrer ganzen Länge nach; sie zerfällt nie in zwei Theile.

Darüber entscheiden die Knotenpunkte A und B. Sind diese auf jenen Theilen der Doppelleitlinien gelegen, die als eigentliche gelten, so ist die Doppelgerade ebenfalls eine eigentliche, wirkliche Flächenerzeugende. In allen anderen Fällen ist sie aber selbst eine uneigentliche Doppelerzeugende.

Bemerkenswerth ist der Uebergang zwischen beiden jetzt angeführten Fällen.

Berührt die Gerade AB den Trägerkegelschnitt C_2, so vereinigt sich in ihrem Berührungspunkte je ein Ordnungspunkt der Involutionen J_B und J_A; es seien dies die Ordnungspunkte M', L'. Die ihnen entsprechenden *reellen* Cuspidalpunkte M, L auf g und h haben sich mit je einem Knoten vereinigt. Es sind A und B zwei Cuspidalpunkte der Fläche und die Gerade AB gilt uns für zwei *singuläre* Erzeugende.

Die Ebenen (dg) und (dh), da sie nun Cuspidalebenen sind, berühren die Fläche längs der Doppelerzeugenden d; es berührt die Fläche sich selbst, wir nennen daher d eine *stationäre* Doppelerzeugende. (Es ist nicht denkbar, dass der reelle Cuspidalpunkt M (oder L) nicht in dem Punkte A (oder B) wäre, da sich dann, wenn wir das Entgegengesetzte annehmen würden, in den vereinigten Ordnungspunkten M', L' zwei singuläre Erzeugende und die Doppelerzeugende treffen würden was widersinnig ist, da aus einem Punkte nur eine Transversale zu zwei windschiefen Geraden g, h gelegt werden kann.)

5. Die Fläche Φ, welche die Punktreihe g und die ihr projective Involution J_B, oder auch die Punktreihe h und die vorher genau bestimmte Involution J_A, erzeugen, ist von der *vierten* Ordnung, da sie von einer beliebig angenommenen Geraden x in vier Punkten getroffen werden kann, folglich auch durch die Gerade x höchstens vier Tangentenebenen gelegt werden können.

Es bestimmt nämlich eine Gerade x mit den Leitgeraden g, h eine Regelfläche zweiten Grades, welche von der Ebene α, in welcher C_2 ist, in einem Kegelschnitte C_2' geschnitten wird. Diese beiden Kegelschnitte treffen sich in *vier* Punkten; jeder von ihnen ergiebt eine gemeinsame Erzeugende beider Flächen, deren Treffpunkte mit der Geraden x die gesuchten Durchstosspunkte sind.

Durch die Gerade x und durch je eine gemeinsame Erzeugende sind auch die vier möglichen Tangentenebenen bestimmt, die durch die angenommene Gerade an die Fläche Φ gelegt werden können. Eine besonders bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt jene Fläche, wenn die beiden Pole A und B in Bezug auf den Kegelschnitt C_2 harmonisch conjugirt sind.

Das dem Punkte P der Punktreihe g entsprechende Paar $P'P''$ in der Involution J_B ergiebt zwei Erzeugende e_1, e_2, welche die Leitgerade h in den Punkten Q, R treffen mögen. Diesen Treffpunkten ist in der Involution J_A ein Paar Q', Q'' und R', R'' zugeordnet, wo Q' mit P', R' hingegen mit P'' identisch sein muss. Da nun A und B harmonisch zugeordnete Pole sind, so muss die Gerade $Q''R''$ den Punkt B enthalten. Es sind also diese ein Paar in der Involution J_B und die durch sie gehenden Erzeugenden e_3, e_4 treffen sich in dem entsprechenden Punkte S auf der Leitgeraden g. Die vier Erzeugenden e_1, e_2, e_3 und e_4 bilden ein Quadrupel und es ist ersichtlich, dass sich alle Flächenerzeugenden in solche Quadrupel ordnen.

Infolge dieser Eigenschaft erzeugen die Punkte P, S und Q, R quadratische Involutionen auf den Doppelgeraden g und h. Da nun die Ordnungspunkte K', L' der Involution J_A ein einfaches Punktepaar für die Involution J_B darstellen, so müssen die ihnen entsprechenden, auf h liegenden Cuspidalpunkte K, L solche zwei singuläre Erzeugende ergeben, welche sich in einem Punkte auf der anderen Doppelgeraden g treffen. Dieser Treffpunkt ist ja jener, der dem Paare K', L' (in der Involution J_B) als projectiv zugeordnet auf g gedacht werden muss. — Die beiden singulären Erzeugenden, welche aus den auf der Doppelgeraden g liegenden Cuspidalpunkten M, N ausgehen, treffen sich wieder in einem Punkte der anderen Doppelgeraden h. Diese beiden Treffpunkte D_g und D_h, dann die Knoten A und B sind die vier Doppelpunkte der beiden Involutionen auf den Doppelgeraden. Da A und B stets vorhanden sind, so ersehen wir, dass die Involutionen stets reelle Doppelpunkte besitzen.

Doch ist es nach Vorigem ersichtlich, dass die den respectiven Doppelpunkten in der anderen Involution entsprechenden Cuspidalpunkte nicht reell sein müssen; sondern im Gegentheil, bei windschiefen Flächen Φ, deren Erzeugende Quadrupel bilden, muss stets ein Paar Cuspidalpunkte imaginär sein. Die harmonischen Eigenschaften der Involution ergeben weiter die Erkenntniss, dass je zwei Erzeugende, die aus einem Punkte einer Doppel-

geraden ausgehen, die andere Doppelgerade in Punkten treffen, welche durch die Doppelpunkte der betreffenden Involution harmonisch getrennt sind.

6. Die bisher dargestellte Erzeugungsweise erlaubt noch manche Specialisirungen; es sollen nun die dadurch entstehenden Flächen kurz erwähnt werden.

Verlegen wir den Pol B der Involution J_B, deren Paare den Punkten auf der Trägergeraden g projectiv zugeordnet werden, in einen Punkt des Kegelschnittes C_2, so zerfällt die Fläche Φ in zwei Theile. Einer ist die Ebene (Bg), der andere ist daher eine windschiefe Regelfläche dritten Grades. Die Gerade g ist nur eine einfache Leitgerade der Fläche dritten Grades; die aus B ausgehende Gerade h, deren Existenz wir auf die eingangs gegebene Weise beweisen können, bleibt auch hier Doppelleitlinie.

Auf C_2 ist nun keine Involution J_B mehr, sondern nur die Involution J_A; wir sagen daher, dass die windschiefe Fläche dritten Grades erzeugt wird durch zwei projective Punktreihen, von denen eine auf der einfachen Leitgeraden, die andere auf einem Trägerkegelschnitt sich befindet, wenn nebstbei dem Punkte $(g\alpha) \equiv A$ der Schnittpunkt A' der Geraden AB mit C_2 als zugeordnet angesehen wird. Ist der Schnittpunkt $(g\alpha) \equiv A$ ein Punkt der Curve C_2 und wird der Punkt B abermals in einen Punkt der C_2 verlegt, so zerfällt die Fläche in drei Theile. Zwei davon sind die Strahlenbüschel in den Ebenen (Bg) und (Ah), wo h die andere aus B ausgehende Leitgerade ist; der Rest ist eine windschiefe Regelfläche zweiten Grades.

Liegt der Schnittpunkt $(g\alpha) \equiv A$ auf der Curve C_2, der Involutionspol B aber nicht auf der Curve C_2, so zerfällt wie im zuerst angeführten Falle die Fläche in ein Ebenenbüschel und in eine geradlinige Fläche dritten Grades. Die Gerade G ist eine Doppelleitlinie; die einfache Leitlinie ist eine zu ihr windschiefe, aus B ausgehende Gerade. Es entstehen also dieselben Verhältnisse wie im ersten Falle, nur sind jetzt die Benennungen der Leitgeraden verwechselt. Nun möge zum Schlusse jener interessante Fall hervorgehoben werden, der dann eintritt, wenn man den Pol B in den Punkt $(g\alpha) \equiv A$ verlegt, wo aber A kein Curvenpunkt des Trägerkegelschnittes sei.

Die dann erzeugte windschiefe Fläche vierten Grades besitzt zwei unendlich nahe windschiefe Doppelleitgerade g und h. Es ist das ein ähnliches Verhältniss wie bei der *Cayley*schen windschiefen Regelfläche dritten Grades.

7. Bei der allgemeinen windschiefen Regelfläche mit zwei Doppelleitlinien und einer Doppelerzeugenden bestimmen die Erzeugenden auf den Doppelleitlinien zwei in zwei-zweideutiger Beziehung stehende Punktreihen. Doch diese Beziehung ist nicht ganz allgemein, da wir ein Reductionspunktepaar A und B vom zweiten Grade haben, da jeder von ihnen dem anderen zweimal (doppelt) zugeordnet ist. Verschieben wir die Trägergerade h in eine solche Lage, dass B auf A fällt, so befinden sich die beiden geraden Gebilde in reducirter Lage zweiten Grades und die Verbindungslinien entsprechender Punkte erzeugen eine Kegelfläche zweiten Grades.

Es bestimmen ferner die Erzeugenden mit den Doppelleitlinien zwei Ebenenbüschel, die auch in zwei-zweideutiger Beziehung stehen. Diese Ebenenbüschel haben auch ein Reductionsebenenpaar zweiten Grades; es ist dies die Ebene (gB) für den Büschel g, die Ebene (hA) für den Büschel h.

Die Punktreihen g, h sind ferner in perspectiver Lage mit den Ebenenbüscheln, deren Axen h, g sind. Es kann daher ein und dieselbe Erzeugende als Verbindungsgerade zweier entsprechenden Punkte auf g und und h, wie auch als Schnitt jener Ebenen angesehen werden, welche diese Punkte aus den Axen h und g projiciren.

Jedem Punkte auf g entspricht also eine durch ihn gehende Ebene des Büschels mit der Axe h, und umgekehrt. Wir haben daher ein Nullsystem. Die Erzeugenden der Fläche bilden ein Strahlensystem *erster Ordnung* und *erster Klasse;* die Doppelleitlinien sind die Axen dieses Strahlensystems.

Die Axen g, h sind als conjugirte Polaren im Nullsystem anzusehen, woraus folgt, dass die Fläche Φ sich selbst reciprok zugeordnet ist. Auf Grund dieser Erkenntniss können wir alles bisher Gesagte verwenden, um neue Erzeugungsarten für die Fläche abzuleiten, die den bisherigen dual gegenüberstehen. Z. B. ein Ebenenbüschel g und eine ihm projective Tangentenebenen-Involution auf einem Kegel zweiten Grades K_2, erzeugen dann eine Regelfläche vierten Grades mit drei Doppelgeraden, wenn die Ebene α des Büschels, welche durch den Scheitel des Kegels geht ihn jedoch nicht berührt, das ihr zugeordnete Ebenenpaar der Involution in einer Geraden d schneidet. In der Involutionsebene liegt die andere Doppelleitlinie h, u. s. w.

8. Die windschiefe Fläche Φ ist vom Geschlechte Null, da sie eine

Doppelcurve dritter Ordnung — die drei windschiefen Doppelgeraden — besitzt. Alle Schnitte von Ebenen sind daher auch vom Geschlechte Null.

Wir übergehen alle Sätze, die sich auf ebene Schnittcurven der windschiefen Fläche beziehen, und die diesen Sätzen dual gegenüberstehenden, welche von den der Fläche umschriebenen Kegeln handeln.

Die Schnittcurven können angesehen werden, als Erzeugnisse zweier in zwei-zweideutiger Beziehung stehenden Strahlenbüschel in der Schnittebene; die Tangentialkegel als Erzeugnisse zweier in zwei-zweideutiger Beziehung stehenden Strahlenbüschel mit demselben Scheitel, aber in verschiedenen Trägerebenen.

Es sei nur bemerkt, dass Ebenen, welche durch die Doppelerzeugende d gelegt werden; die Fläche in Curven zweiten Grades schneiden. In einer solchen Ebene entstehen zwei in zwei-zweideutiger Beziehung stehende Strahlenbüschel mit den Scheiteln A, B, welche den Strahl AB doppelt gezählt gemein haben und sich daher in reducirter Lage vom zweiten Grade befinden. Ihr Erzeugniss ist die Schnittcurve, welche die Doppelleitlinien nicht trifft, von der Doppelerzeugenden aber in zwei Punkten getroffen wird. Diese Treffpunkte sind die Berührungspunkte. Es folgt nun, dass durch einen Punkt der Fläche nur ein Kegelschnitt auf ihr gezeichnet werden kann. Er befindet sich in der durch diesen angenommenen Punkt und die Doppelerzeugende gelegten Ebene. Diese Ebene trifft die Cuspidalebenen in Schnittgeraden, welche Tangenten für den betreffenden Kegelschnitt sind; die Berührungspunkte liegen in den singulären Erzeugenden.

Die Flächenerzeugenden bestimmen auf jedem Kegelschnitt Involutionen mit den Polen A und B. Man ersieht daher, dass der zuerst angenommene Kegelschnitt C_2 keine besondere Stellung inne hat; ein jeder Kegelschnitt auf Φ kann ihn ersetzen. Hat die Fläche eine stationäre Erzeugende d, so wird diese von allen auf ihr liegenden Kegelschnitten berührt. Die Reihe der Berührungspunkte ist projectiv zum Ebenenbüschel, den die Ebenen jener Kegelschnitte bilden.

Es ist bekannt, dass die allgemeine windschiefe Fläche Σ vierten Grades erzeugt werden kann vermittelst zweier projectiven Punktreihen, deren Träger zwei Kegelschnitte C_2 und C_2' sind, welche in zwei Ebenen α und α' liegen. Die Doppelcurve ist doppelt gekrümmt und dritter Ordnung. Soll auf Grund solcher projectiven Punktreihen die Fläche Φ mit drei Doppelgeraden erzeugt werden, so muss die Zuordnung auf eine ge-

wisse Art hergestellt werden. Man ordne den Punkten P, Q, in welchen C_2 von der Schnittgeraden $(\alpha\alpha') \equiv d$ beider Ebenen α, α' getroffen wird, jene Punkte P', Q' in C_2' zu, wo C_2' von derselben Geraden $(\alpha\alpha')$ geschnitten wird.

Es wird dann die Gerade $(\alpha\alpha')$ eine Doppelerzeugende sein. Wird noch ein drittes Paar R, R' angenommen, so können andere Paare construirt werden auf Grund der Doppelverhältnisse

$$(PQRS) = (P'Q'R'S'),$$
$$(PQRT) = (P'Q'R'T').$$

Wir haben nun drei Erzeugende $RR' \equiv r$, $SS' \equiv s$ und $TT' \equiv t$. Man bestimmt dann leicht jene beiden Transversalen g und h, welche diese drei Erzeugenden r, s, t und die Doppelerzeugende $d \equiv (\alpha\alpha')$ treffen. Es seien die Treffpunkte der Transversale g mit den Erzeugenden r, s, t und d die Punkte G_r, G_s, G_t und A; die Transversale h treffe diese vier Erzeugenden in den respectiven Punkten H_r, H_s, H_t und B.

Es besteht dann die Gleichheit folgender Doppelverhältnisse:

$$(G_r H_r R R') = (G_s H_s S S') = (G_t H_t T T'),$$

denn jedesmal sind die betreffenden vier Punkte die Schnitte der Erzeugenden r, s, t mit den vier Ebenen (dg), (dh), α und α'.

Es sei X ein variabler Punkt der gegebenen Curve C_2; man ziehe jedesmal durch X jenen stets eindeutig bestimmten Strahl x, der die Transversalen g und h treffen muss — es möge dies in den Punkten G_x, H_x geschehen — und fixire in diesem Strahle jenen Punkt X', welcher durch das Doppelverhältniss $(G_x H_x X X') = (G_r H_r R R')$ eindeutig bestimmt ist, so erzeugt dieser Punkt X', indem er sich stets in der Ebene α' fortbewegt, die *Steiner*sche *windschiefe Projection* der Curve C_2, bezüglich g und h als Axen. Es ist aber diese windschiefe Projection der Curve C_2 identisch mit der gegebenen Curve C_2', da C_2' und diese Projection die Punkte R', S' und T' gemein haben*).

Hiermit ist bewiesen, dass C_2 und C_2' bezüglich der Axen g und h windschief-collineare Curven sind. Jeder Annahme des dritten Paares R, R' entspricht ein anderes Paar der Transversalen g, h.

---

*) *Weyr*: Regelflächen dritter Ordnung, (Leipzig 1870) pag. 152 und 153.

Legt man nun durch den variablen Strahl x — er treffe C_2, C_2' und die Axen g, h in den Punkten X, X', G_x und H_x — und eine der Axen, etwa durch g, eine Ebene, so schneidet diese die Ebenen α und α' in den Geraden AX und AX'; jede dieser Geraden trifft den betreffenden Kegelschnitt in einem zweiten Punkte — sie seien mit Y respective Y' bezeichnet — und diese beiden Punkte sind windschief-collinear bezüglich der Axen g und h, also auch entsprechende Punkte auf C_2 und C_2'. Ihre Verbindungsgerade $y \equiv YY'$ trifft die Axe g in einem Punkte G_y, die Axe h im Punkte H_y, wo aber H_y mit H_x coincidiren muss. (Die Axe h trifft ja die Ebene (xy) nur in einem Punkte.) *Jede durch g — oder durch h — gelegte Ebene enthält also zwei Erzeugende der Fläche und beide treffen sich auf der Transversale h — respective auf g, falls die Ebene (xy) durch h gelegt wurde;* g und h sind also Doppelgeraden der Fläche.

Es ist nun evident, dass die Punktepaare X, Y auf C_2 und die ihnen entsprechenden X', Y' auf C_2' Involutionen mit dem Pole A bilden und dass die variablen Treffpunkte $H_y \equiv H_x$, in welchen sich jedesmal die Erzeugenden x, y auf h treffen, eine zu diesen Involutionen *projective Punktreihe* bilden.

Es ist daher bewiesen, dass die windschiefe Fläche, welche jene beiden auf C_2 und C_2' sich befindenden projectiven Punktreihen erzeugen, identisch ist mit der im Artikel 1 betrachteten.

Es muss hervorgehoben werden, dass nicht festgesetzt wurde, in welcher Reihenfolge die Zuordnung der Punkte P, Q und der Punkte P', Q' geschehen soll. Man kann P, P' und Q, Q' als zugeordnetes Paar ansehen, aber auch P, Q' und Q, P'. Wird darüber nichts festgesetzt und noch ein drittes zugeordnetes Paar R, R' angenommen, so folgt, *dass durch zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kegelschnitte C_2, C_2' und eine Gerade $RR' \equiv r$, welche beide schneidet, zwei windschiefe Flächen vierten Grades mit drei Doppelgeraden gelegt werden können.*

Berühren im speciellen Falle die beiden Curven C_2 und C_2' die Schnittgerade $(\alpha\alpha') \equiv d$ ihrer Ebenen α, α' und sind diese Berührungspunkte projectiv zugeordnet, so ist die Gerade $(\alpha\alpha') \equiv d$ eine *stationäre* Erzeugende jener Fläche, welche die Projectionsstrahlen, d. h. die Verbindungsgeraden projectiv-zugeordneter Curvenpunkte, erzeugen. Dreht man nämlich die Ebene α' in eine andere Lage α'', so wird der in ihr liegende, zu C_2 windschief-collineare, C_2'' die Gerade d ebenfalls berühren. Ein jeder Kegelschnitt, der auf der Fläche gezeichnet ist, berührt daher diese Gerade d.

Die Punktreihe der Berührungspunkte ist projectiv mit dem Ebenenbüschel, den die drehende Ebene α erzeugt; die Ebenen (dg), (dh) dieses Ebenenbüschels, d. h. jene, welche die Doppelgeraden enthalten, und die Knotenpunkte A respective B sind homologe Elemente. Hat man nun ausser einer Geraden d noch *drei* unter sich und zu d windschiefe Gerade $r, s, t,$ und zeichnet man in jeder durch d gelegten Ebene α_i jenen Kegelschnitt, der die Geraden r, s, t trifft und d in einem, der Ebene α_i zugeordneten, Punkte D_i berührt, ***so erzeugen alle so gezeichneten Kegelschnitte die windschiefe Fläche Φ mit d als stationärer Erzeugenden, wenn die projective Zuordnung der Elemente α_i und D_i so festgesetzt wird, dass jenen Punkten $A, B,$ in welchen die beiden Transversalen g, h der vier Windschiefen d, r, s, t die Gerade d treffen, die respectiven Ebenen (dg), (dh) zugeordnet werden.*** Wird nun in einer beliebigen Ebene α_1 des Büschels, dessen Axe d ist, ein beliebiger Punkt D_1 in d zugeordnet, so ist der zur Ebene α_i zugeordnete Punkt D_i bestimmt mittels der Gleichung:

$$(A,\ B,\ D_1,\ D_i) = [(dg),\ (dh),\ \alpha_1,\ \alpha_i].$$

Es erübrigt noch der Fall, dass die gegebenen Kegelschnitte C_2 und C_2' von der Schnittgeraden d ihrer Ebenen α und α' nicht getroffen werden. Um nun auch auf diesen Kegelschnitten solche projectiven Punktreihen herzustellen, dass die Verbindungsgeraden homologer Punkte eine windschiefe Fläche Φ vierten Grades mit zwei Doppelgeraden und einer Doppelerzeugenden bilden, hat man die windschiefe Collineation der Ebenen α und α' so zu nehmen, dass 1) ***die Schnittgerade d sich selbst entsprechend sei,*** dass 2) ***dem Pole P der Geraden d bezüglich der Curve C_2 der Pol P' derselben d bezüglich der Curve C_2' entsprechen möge.*** (Es sind ja in jeder Collineation die Pole entsprechender Geraden bezüglich entsprechender Kegelschnitte ohne Zweifel entsprechende Punkte.) Wird nun einem beliebigen Punkte L der C_2 irgend ein Punkt L' der C_2' als homolog zugeordnet, so ist die Collineation vollkommen bestimmt. Die homologen Geraden LP und $L'P'$ treffen nämlich die sich selbst entsprechende Gerade d in homologen Punkten Q und Q'; und es sind die aus Q an die Curve C_2 gelegten Tangenten und ihre Berührungspunkte M, N beziehungsweise homolog den aus Q' an C_2' gezogenen Tangenten und ihren respectiven Berührungspunkten M', N'. Man bemerke, dass auch hier — ähnlich wie schon bei den reellen Schnittpunkten der d mit C_2 und C_2' — die Reihenfolge der Zuordnung des Paares M, N zum Paare M', N' freisteht. Es sind nun auf den Curven C_2 und C_2' drei homo-

loge Punktepaare festgesetzt. Zu jedem Punkte X von C_2 ist sein homologer X' bestimmbar auf Grund der Gleichung: $(LMNX) = (L'M'N'X')$, oder bei zweiter Wahl auf Grund von:

$$(LMNX) = (L'N'M'X').$$

Die Axen g, h der windschiefen Collineation sind für jeden Fall eindeutig bestimmt durch die vier Windschiefen d, LL', MM', NN', oder bei zweiter Wahl durch d, LL', MN', NM'. Betreffs dieser Axen sind C_2 und C_2' windschief-collinear, und die Verbindungsgeraden homologer Punkte erzeugen eine windschiefe Fläche Φ vierten Grades mit d als Doppelerzeugender und g, h als Doppelgeraden. Durch C_2 und C_2' und ihre Transversale LL' können also abermals zwei solche Flächen Φ gelegt werden.

9. Dreht man um die Doppelerzeugende d eine durch sie gelegte Ebene α, und bestimmt man in jeder Lage die Polaren der Punkte A und B hinsichtlich der Kegelschnitte, in welchen die Ebenen dieses Büschels die Fläche schneiden, so werden diese Polaren *zwei Regelflächen zweiten Grades erzeugen.*

Es liegen nämlich für jede Lage der drehenden Ebene die betreffenden Punkte M', N' in den zugehörigen singulären Erzeugenden. Die Punktreihe der M' ist aber projectiv mit jener der Punkte N'; die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte sind die gedachten Polaren, sie erzeugen daher eine Regelfläche zweiten Grades.

Analoges gilt für den geometrischen Ort der Polaren von A hinsichtlich aller Kegelschnitte auf der Fläche. Die Doppelleitlinien gehören beiden dadurch entstandenen Regelflächen an und sind daher ein Theil ihres Schnittes; der Rest zerfällt in die Doppelgerade d und in noch eine vierte Gerade s, welche die Doppelleitlinien g und h trifft. Diese Gerade s ist der geometrische Ort für die Pole S der Doppelgeraden d hinsichtlich aller Kegelschnitte.

Die Geraden d, s und je zwei singuläre Erzeugende sind vier harmonische Erzeugende der betreffenden Regelfläche zweiten Grades, folglich ist:

$$(KLBS_h) = -1 \quad \text{und} \quad (MNAS_g) = -1,$$

wo S_h und S_g jene Punkte sind, in welchen h und g von der Geraden s getroffen werden.

Construiren wir in jeder Lage der Ebene α die betreffenden Tangenten in den variablen Schnittpunkten A', A'' des Kegelschnittes und der

Doppelerzeugenden d, so sind dies die zwei Haupttangenten der Fläche; man ersieht, dass sich je zwei in der Geraden s treffen müssen. Diese Haupttangenten erzeugen die beiden Schmiegungshyperboloide der Fläche längs der Doppelerzeugenden, welche Hyperboloide sich also ausser in g, h und d noch in s durchschneiden. —

10. Sind die Doppelleitlinien g und h parallel mit der Ebene α der Leitcurve C_2, so ist die Doppelerzeugende unendlich fern gerückt; alle mit der Ebene α parallelen Ebenen schneiden daher die Fläche in Curven zweiten Grades, und der geometrische Ort der Mittelpunkte ist die zu der unendlich fernen Doppelerzeugenden conjugirte Polare s.

Sind in einem Falle die Geraden g und h parallel mit den Axen der Leitcurve C_2, so sind die unendlich fernen Punkte A und B conjugirte Punkte hinsichtlich aller Kegelschnitte auf der Fläche. Die Axen aller dieser Kegelschnitte sind unter sich parallel. Hierher gehört das bekannte „Normalenbündel" der darstellenden Geometrie.

Ueber isochrone Pendelschwingungen.

(Von Herrn *H. Ruoss* in Cannstadt.)

Herr *O. Böcklen* hat sich mit den Aufhängepunkten und Axen isochroner Pendelschwingungen beschäftigt*) und unter anderem gefunden:

Alle Aufhängepunkte für isochrone Schwingungen eines Körpers liegen auf oder zwischen den beiden Mänteln zweier Flächen, von denen die erste durch Verlängerung, die zweite durch Verkürzung der Halbmesser einer Wellengeschwindigkeitsfläche V um die halbe Länge des isochronen einfachen Pendels abgeleitet wird.

Die Fläche V ist dabei die Wellenfläche der Fusspunktsfläche eines Ellipsoids, eines ein- oder zwei-manteligen Hyperboloids; in den zwei letzten Fällen gehört sie zu den noch wenig untersuchten Flächen**).

Man kann nun auch die Vertheilung der Schwingungspunkte in der Weise bestimmen, dass man von allen denkbaren Geraden des Raumes diejenige Gruppe herausgreift, welche senkrecht zu einem Schwerpunktsstrahl steht; so dass jedem Punkt P eines Schwerpunktsstrahles s unendlich viele Schwingungsaxen p entsprechen, deren Ebene senkrecht zu s ist.

Von diesem Gesichtspunkte aus behandeln wir die folgenden noch offenen Fragen, welche auf äusserst einfache Flächen führen:

1) Welches ist die Regelfläche, deren Erzeugende einem Schwerpunktsstrahl angehören, und welche als Drehaxen isochrone Körperschwingungen ergeben?

2) Wo liegen diejenigen Schwerpunktsstrahlen, welchen imaginäre Drehaxen entsprechen?

3) Wie viel Pendelschwingungen kann ein Körper höchstens in 1 Minute machen?

---

*) Dieses Journal Bd. 93 und *Schlömilch*'s Zeitschrift Bd. 26, 1883.

**) Dieses Journal Bd. 93 p. 183.

Es sei S der Schwerpunkt,

$$(1.)\qquad ax^2+by^2+cz^2 = 1$$

das zugehörige *Cauchy-Poinsot*sche Centralellipsoid, wobei $k_1^2=a$, $k_2^2=b$, $k_3^2=c$ die Quadrate der Hauptträgheitsaxen und $a>b>c$ ist. Die Halbmesser dieses Ellipsoids stellen dann die reciproken Werthe der betreffenden Trägheitsaxen dar, so dass die Halbmesser der inversen Fläche:

$$(2.)\qquad (x^2+y^2+z^2)^2 = ax^2+by^2+cz^2,$$

welche bekanntlich Fusspunktsfläche des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} = 1$$

ist, die Grösse der Trägheitsaxen direct angeben.

Sind nun die Schwingungen um die beliebige Axe p isochron mit denen des mathematischen Pendels von der Länge l, so ist

$$l = \frac{k^2+e^2}{e},$$

wo $e=SP$, und k der Trägheitsradius um eine durch S parallel p gezogene Gerade ist.

Die Länge l, und dies ist wesentlich für das Folgende, lässt sich daher bei gegebenem P und p folgendermassen construiren: Man errichte in S auf SP das zu p parallele Loth $SA=k$ und in A auf PA das Loth, welches PS in B trifft, dann ist $PB=l$. Bei gegebenem P und l findet man daher den zugehörigen Punkt A, indem man über $PB=l$ eine Kugel beschreibt; durch $S\perp SP$ eine Ebene legt, welche Fläche (2.) in einer Curve C schneidet; diese liefert dann mit der Kugel den gesuchten Punkt A, wodurch dann auch p bestimmt ist.

Führt man diese Construction für alle Punkte P eines Schwerpunktsstrahles s aus, so erhält man die Erzeugenden p der gesuchten Regelfläche.

Nimmt man die Axen der Ellipse, in welcher die Ebene der Curve C das Ellipsoid (1.) schneidet, zu x- und y-Axen und s zur z-Axe, so ist

$$\alpha x^2+\beta y^2 = 1, \quad \text{wo} \quad \alpha>\beta \quad \text{sei,}$$

diese Ellipse, also die inverse

$$\alpha x^2+\beta y^2 = (x^2+y^2)^2$$

Beschreibt man um S eine Kugel mit dem Radius $\frac{l}{2}$, deren Gleichung in dem ursprünglich angenommenen Coordinatensystem

$$(3.)\qquad x^2+y^2+z^2 = \frac{l^2}{4}$$

ist, so schneidet dieselbe die Fläche (2.) in einer Curve, welche auf dem Kegel:

$$(4.)\qquad x^2\left(\frac{l^2}{4}-a\right)+y^2\left(\frac{l^2}{4}-b\right)+z^2\left(\frac{l^2}{4}-c\right) = 0$$

liegt. Die Fläche (2.) hat S zum Mittelpunkt, alle ihre Schnitte, deren Ebenen durch S gehen, sind hantelförmige Curven (Fusspunktscurven von Ellipsen), ihr kleinster Radius $\sqrt{c}$ liegt auf der z-Axe; ihr grösster $\sqrt{a}$ auf der x-Axe.

Betrachtet man nun die Curven C, welche zu den Schwerpunktsstrahlen gehören, und die Kugel (3.), so ergiebt sich für den Fall

1) $\frac{l}{2} > \sqrt{a}$: Alle Schwerpunktsstrahlen haben reelle Drehaxen.

2) $\frac{l}{2} = \sqrt{a}$: Es trifft dasselbe wie bei (1.) zu, und zwar haben alle in der zy-Ebene liegenden Schwerpunktsstrahlen Regelflächen von der Form der Schiffsschraube.

3) $\frac{l}{2} < \sqrt{a}$ aber $> \sqrt{b}$: wie bei (1.).

4) $\frac{l}{2} = \sqrt{b}$: Kegel (4.) zerfällt in zwei Ebenen, welche mit den centralen Kreisschnitten der Flächen (2.) und (4.) zusammenfallen. Für Strahlen senkrecht zu diesen Schnitten ist C ein Kreis; daher finden sich auf diesem Strahl nur je zwei Punkte mit reellen Drehaxen; ihre Zahl ist aber nicht zwei oder eins, sondern unendlich gross; auch hier giebt es nur Strahlen mit reellen Drehaxen.

Wie gross auch l sein möge, immer werden sich auf den Strahlen, welche senkrecht zu den Kreisschnitten des Ellipsoids (1.) stehen, nur vier, zwei oder kein reeller Punkt finden, durch welchen unendlich viele Drehaxen gehen.

5) $\frac{l}{2} < \sqrt{b} > \sqrt{c}$: Curven C, welche den Kegel (4.) nicht schneiden, gehören zu Schwerpunktsstrahlen *ohne* reelle Drehaxen, alle anderen Strahlen haben reelle Drehaxen.

Die Schwerpunktsstrahlen ohne reelle Drehaxen liegen also im Inneren des Polarkegels von (4.).

6) $\frac{l}{2} = \sqrt{c}$: Nur die Schwerpunktsstrahlen der xy-Ebene haben reelle Drehaxen und zwar nur je zwei.

Für jeden Schwerpunktsstrahl existirt ein Punkt und eine Drehaxe, welche unter allen Drehaxen des Strahles die kleinste Schwingungszeit ergiebt; aus $l = \frac{k^2+e^2}{e}$ folgt, dass für den kleinsten Werth von k und $e = k$ dieses Minimum eintritt. Die entsprechenden Axen gehen also alle parallel mit den kleinsten Axen der Curven C, und die Punkte liegen auf dem inneren Mantel der Wellengeschwindigkeitsfläche von (2.), deren Vectoren die halbe entsprechende mathematische Pendellänge angeben.

Die Axen der kleinsten Schwingungszeit eines Körpers endlich sind Mantellinien eines *Kreiscylinders,* welcher um die grösste Axe des Ellipsoids (1.) mit ihrer reciproken Länge als Radius beschrieben wird; die grösste Schwingungszahl in einer Minute ist demnach

$$\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{2k_3}},$$

wo k_3 der kleinste Trägheitsradius der Körpers ist.

Nimmt man ein Lineal 40 cm lang, 2 cm breit, 1 cm dick und leimt an einem Ende ein 30 cm langes, 2 cm breites, 1 cm dickes auf, so dass ein T-förmiges Pendel entsteht und bringt in den Entfernungen 8,6; 10,26; 12,34; 14,28; 16,22; 18,30; 19,96 cm Axen unter 0^0; 45^0; 70^0; 90^0; 110^0; 135^0; 180^0 an, so bilden diese die schraubenförmige Regelfläche des verticalen Schwerpunktsstrahles; lässt man den Körper um diese Axen in einem Bügel schwingen (die Axen müssen, damit die Schwingungen nicht zu schnell aufhören, in ihren Löchern drehbar sein), so ist die Schwingungszahl jedesmal 55 in der Minute.

Die Maximalzahl der Schwingungen ist 88,6 in einer Minute, die betreffenden Axen liegen auf einem verticalen Kreiscylinder, dessen Radius 5,96 cm ist.

Ueber die Reduction der Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe.

(Von Herrn *L. Pochhammer* in Kiel.)

Den Gegenstand der nachstehenden Untersuchungen bildet die lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$(1.)\quad \begin{cases} x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n}+L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+L_2 x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots \\ \qquad\cdots+L_{n-\mu}x^{\mu-1}\frac{d^\mu y}{dx^\mu}+\cdots+L_{n-2}x\frac{d^2y}{dx^2}+L_{n-1}\frac{dy}{dx} \\ = x^m\frac{d^m y}{dx^m}+K_1 x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+K_2 x^{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots \\ \qquad\cdots+K_{m-\mu}x^\mu\frac{d^\mu y}{dx^\mu}+\cdots+K_{m-1}x\frac{dy}{dx}+K_m y, \end{cases}$$

in der $K_1, \ldots, K_m$, $L_1, \ldots, L_{n-1}$ Constante bedeuten und $m \leqq n$ vorausgesetzt wird*). Auf die Integration der Gleichung (1.) durch Potenzreihen bin ich in der Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe"**) näher eingegangen. Die Parameter, welche in diesen Reihen vorkommen, sind mit den Constanten $K_1, \ldots, K_m$, $L_1, \ldots, L_{n-1}$ durch algebraische Gleichungen verbunden. Man definirt, indem man durch $[z]_\nu$ die ganze Function νten Grades von z

$$(2.)\qquad [z]_\nu = z(z-1)(z-2)\ldots(z-\nu+1),\quad [z]_0 = 1,$$

bezeichnet, m Constante $A_1, \ldots, A_m$ und $n-1$ Constante $R_1, \ldots, R_{n-1}$ durch

*) Die Fälle $m = n$ und $m = n-1$ der obigen Gleichung habe ich bereits im 102. und im 108. Bande dieses Journales behandelt. Man sehe die Abhandlungen: „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten", Bd. 102, S. 76—159, und „Ueber eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte", Bd. 108, S. 50—87.

**) Mathematische Annalen, Bd. 38, S. 586—597.

die für einen beliebigen Werth von z geltenden Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} [z]_m + K_1[z]_{m-1} + K_2[z]_{m-2} + \cdots + K_{m-1}[z]_1 + K_m \\ \qquad = z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \cdots + A_{m-1} z + A_m, \end{cases}$$

$$(4.)\quad \begin{cases} [z]_{n-1} + L_1[z]_{n-2} + L_2[z]_{n-3} + \cdots + L_{n-2}[z]_1 + L_{n-1} \\ \qquad = z^{n-1} + R_1 z^{n-2} + R_2 z^{n-3} + \cdots + R_{n-2} z + R_{n-1}. \end{cases}$$

Ferner sei (für ein beliebiges z)

$$(5.)\quad z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \cdots + A_{m-1} z + A_m = (z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\cdots(z+\alpha_m),$$

$$(6.)\quad z^{n-1} + R_1 z^{n-2} + R_2 z^{n-3} + \cdots + R_{n-2} z + R_{n-1} = (z+\varrho_1)(z+\varrho_2)\ldots(z+\varrho_{n-1}),$$

so dass die Grössen $A_1, \ldots, A_m$ die elementaren symmetrischen Functionen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, und die Grössen $R_1, \ldots, R_{n-1}$ die elementaren symmetrischen Functionen von $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ darstellen. Dann ist die unendliche Reihe

$$(7.)\quad \begin{cases} F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m;\ \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1};\ x) \\ = 1 + \dfrac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}{1.\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}} x + \dfrac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\ldots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)} x^2 + \cdots, \end{cases}$$

welche kurz als eine F-Reihe $n$ter Ordnung bezeichnet wird, ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1.). Ausserdem genügen dieser Gleichung die $n-1$ analog gebildeten F-Reihen

$$x^{1-\varrho_1} F\begin{pmatrix} \alpha_1-\varrho_1+1,\ \alpha_2-\varrho_1+1,\ \ldots,\ \alpha_m-\varrho_1+1; \\ 2-\varrho_1,\ \varrho_2-\varrho_1+1,\ \varrho_3-\varrho_1+1,\ \ldots,\ \varrho_{n-1}-\varrho_1+1;\ x \end{pmatrix},$$

. . . .

$$x^{1-\varrho_{n-1}} F\begin{pmatrix} \alpha_1-\varrho_{n-1}+1,\ \alpha_2-\varrho_{n-1}+1,\ \ldots,\ \alpha_m-\varrho_{n-1}+1; \\ 2-\varrho_{n-1},\ \varrho_1-\varrho_{n-1}+1,\ \varrho_2-\varrho_{n-1}+1,\ \ldots,\ \varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}+1;\ x \end{pmatrix}.$$

Es wird vorausgesetzt, dass keine der Constanten ϱ_i, $\varrho_i-\varrho_k$ ganzzahlig sei. Abgesehen vom Fall $m=n$ (welcher hypergeometrische Reihen liefert — s. d. Abh. in Bd. 102) sind die obigen Reihen transcendente ganze Functionen von x.

Die Ausdrücke, die sich für die Constanten $K_1, \ldots, L_1, \ldots$ als Functionen von $\alpha_1, \ldots, \varrho_1, \ldots$ ergeben, enthalten gewisse ganzzahlige Coefficienten, welche aus der Theorie der analytischen Facultäten bekannt sind und hier (wie in meinen früheren Arbeiten) durch $d_\nu^{(p)}$ bezeichnet werden. Man setzt für ein positives ganzzahliges p und für ein beliebiges z

$$(8.)\quad z^p = d_0^{(p)} + d_1^{(p)}[z-1]_1 + d_2^{(p)}[z-1]_2 + \cdots + d_\nu^{(p)}[z-1]_\nu + \cdots + d_p^{(p)}[z-1]_p,$$

wo $[z-1]_\nu$ nach (2.) das Product $(z-1)(z-2)\dots(z-\nu)$ bedeutet*). Aus (3.) und (4.) folgt zunächst (für $z=0$)

$$(9.)\qquad K_m = A_m = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m,\quad L_{n-1} = R_{n-1} = \varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{n-1}.$$

Indem man sodann auf den rechten Seiten von (3.) und (4.) (nach Forthebung der Summanden K_m, A_m, L_{n-1}, R_{n-1} und Division durch z) die Potenzen von z mit Hülfe von (8.) nach den Factoriellen $[z-1]_\nu$ entwickelt, findet man die Gleichungen**)

$$(10.)\qquad K_{m-\mu} = \begin{cases} d_{\mu-1}^{(\mu-1)} A_{m-\mu} + d_{\mu-1}^{(\mu)} A_{m-\mu-1} + d_{\mu-1}^{(\mu+1)} A_{m-\mu-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + d_{\mu-1}^{(\nu-1)} A_{m-\nu} + \cdots + d_{\mu-1}^{(m-2)} A_1 + d_{\mu-1}^{(m-1)} \end{cases}$$

für $\mu = 1, 2, \dots, m-1$, und

$$(11.)\qquad L_{n-\mu} = \begin{cases} d_{\mu-2}^{(\mu-2)} R_{n-\mu} + d_{\mu-2}^{(\mu-1)} R_{n-\mu-1} + d_{\mu-2}^{(\mu)} R_{n-\mu-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + d_{\mu-2}^{(\nu-2)} R_{n-\nu} + \cdots + d_{\mu-2}^{(n-3)} R_1 + d_{\mu-2}^{(n-2)} \end{cases}$$

für $\mu = 2, 3, \dots, n-1$. Zu einer zweiten Darstellung der Grössen $K_{m-\mu}$, $L_{n-\mu}$ als Functionen von $\alpha_1, \dots, \varrho_1, \dots$ gelangt man, wenn man die Constanten

$$(12.)\qquad \begin{cases} b_1 = \alpha_1 - 1, & b_2 = \alpha_2 - 1, & \dots, & b_m = \alpha_m - 1, \\ s_1 = \varrho_1 - 1, & s_2 = \varrho_2 - 1, & \dots, & s_{n-1} = \varrho_{n-1} - 1 \end{cases}$$

einführt und (für ein beliebiges z)

$$(13.)\qquad (z+b_1)(z+b_2)\dots(z+b_m) = z^m + B_1 z^{m-1} + \cdots + B_{m-1} z + B_m,$$

$$(14.)\qquad (z+s_1)(z+s_2)\dots(z+s_{n-1}) = z^{n-1} + S_1 z^{n-2} + \cdots + S_{n-2} z + S_{n-1}$$

setzt. Es gelten dann die Gleichungen***)

$$(15.)\qquad K_{m-\mu} = \begin{cases} d_\mu^{(\mu)} B_{m-\mu} + d_\mu^{(\mu+1)} B_{m-\mu-1} + d_\mu^{(\mu+2)} B_{m-\mu-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + d_\mu^{(\nu)} B_{m-\nu} + \cdots + d_\mu^{(m-1)} B_1 + d_\mu^{(m)} \end{cases}$$

---

*) Cf. Bd. 102 dieses Journales, S. 114—123. Gemäss obiger Definition ist

$$d_0^{(p)} = 1,\quad d_1^{(p)} = 2^p - 1,\quad d_p^{(p)} = 1,\quad d_{p-1}^{(p)} = \frac{(p+1)p}{1.2},$$

$$d_{p-2}^{(p)} = \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\,\frac{3p-2}{4},\quad d_{p-3}^{(p)} = \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\,\frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

Sodann besteht die recurrirende Gleichung

$$d_\nu^{(p+1)} = (\nu+1)d_\nu^{(p)} + d_{\nu-1}^{(p)}.$$

Für $\nu > p$ ist $d_\nu^{(p)} = 0$.

**) Math. Annalen, Bd. 38, S. 593.

***) Math. Annalen, Bd. 38, S. 595.

für $\mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$, und

$$(16.)\qquad L_{n-\mu} = \begin{cases} d_{\mu-1}^{(\mu-1)} S_{n-\mu} + d_{\mu-1}^{(\mu)} S_{n-\mu-1} + d_{\mu-1}^{(\mu+1)} S_{n-\mu-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + d_{\mu-1}^{(\nu-1)} S_{n-\nu} + \cdots + d_{\mu-1}^{(n-2)} S_1 + d_{\mu-1}^{(n-1)} \end{cases}$$

für $\mu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$.

§ 2.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass man die Differentialgleichung (1.) auf eine analog gebildete Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung reduciren kann, indem man für y ein passend gewähltes bestimmtes Integral einsetzt. Diese Reduction lässt sich auf eine doppelte Weise durchführen. Es werden hier für y nach einander die zwei Ausdrücke

$$(17.)\qquad y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha}\mathfrak{T}\,dt$$

und

$$(18.)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}}\mathfrak{T}\,dt$$

substituirt, in denen g, h, α constant sind und $\mathfrak{T}$ von t allein abhängt. Man kann dann in beiden Fällen die Variable $\mathfrak{T}$ als Function von t durch eine lineare Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung definiren.

Die Substitution (17.) ist dieselbe, die in den erwähnten Abhandlungen im 102. und 108. Bande dieses Journales die Grundlage der Rechnung bildet. In (17.) ist für g, resp. h unter gewissen Voraussetzungen auch der Werth x zulässig. Die Substitution (18.) habe ich in dem kürzlich veröffentlichten Aufsatze „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1};\ x)$"*) für einen Grenzfall der Gleichung (1.) — der dem Werthe $m = 0$ entspricht — in ähnlicher Weise wie hier benutzt. An Stelle von $\mathfrak{T}$ wird, sowohl wenn die Gleichung (17.), als auch wenn die Gleichung (18.) zur Anwendung gelangt, eine neue Variable T eingeführt, welche gleich dem Producte aus $\mathfrak{T}$ und einer Potenz von t ist. Die Differentialgleichung, die sich für T ergiebt, ist eine Gleichung $(n-1)$-ter Ordnung von der Form (1.)**). Geht man von der Substitution (17.) aus, so wird

*) Dieses Journal, Bd. 110, S. 188,

**) Die Buchstaben $\mathfrak{T}$ und T sind in beiden Fällen (jedoch in verschiedener Bedeutung) angewendet worden.

die Gleichung für T aus der Gleichung (1.) erhalten, wenn man n, m, x, y beziehungsweise durch $n-1$, $m-1$, t, T und zugleich K_1, L_1, ... durch andere Constante K_1', L_1', ... ersetzt. Bei Substitution des Integrales (18.) findet im Uebrigen das Gleiche statt; nur bleibt die Zahl m unverändert. Die Differentialgleichung für T wird demnach durch F-Reihen $(n-1)$-ter Ordnung integrirt. Bei diesen Reihen ist, gemäss dem soeben Gesagten, die Anzahl der Zähler-Parameter (die in (7.) durch $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ bezeichnet sind) gleich $m-1$ oder gleich m, je nachdem das Integral (17.) oder das Integral (18.) in (1.) substituirt worden ist. Die Anzahl der Nenner-Parameter (in (7.) durch $\varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}$ bezeichnet) ist in beiden Fällen gleich $n-2$, da sie durch die Ordnung der zugehörigen Differentialgleichung direct bestimmt wird. Sowohl die Zähler- als die Nenner-Parameter der gedachten Reihen $(n-1)$-ter Ordnung sind linear durch die Parameter der Reihe (7.) ausdrückbar.

Die auf die Substitution (17.) bezüglichen Rechnungen sind in den nachstehenden §§ 3—7, die auf die Substitution (18.) bezüglichen in den §§ 8—9 enthalten. Es kommen bei diesen Entwickelungen einige Sätze über Binomialcoefficienten und über die Coefficienten $d_\nu^{(p)}$, sowie ein Satz über eine Doppelsumme zur Anwendung, die zunächst angeführt sein mögen.

Wird durch $(\sigma)_\nu$ der Binomialcoefficient

$$(19.)\qquad (\sigma)_\nu = \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\dots(\sigma-\nu+1)}{1.2.3\dots\nu}, \quad (\sigma)_0 = 1,$$

bezeichnet, so gelten bekanntlich die Formeln

$$(20.)\qquad (\sigma)_i = (\sigma-1)_i+(\sigma-1)_{i-1},$$

$$(21.)\qquad (\sigma+\tau)_i = (\sigma)_i+(\sigma)_{i-1}(\tau)_1+(\sigma)_{i-2}(\tau)_2+\dots+(\sigma)_1(\tau)_{i-1}+(\tau)_i,$$

in denen i irgend eine positive ganze Zahl, und σ, τ beliebige Grössen bedeuten. Für $\tau=-1$ ergiebt sich aus (21.)

$$(\sigma-1)_i = (\sigma)_i-(\sigma)_{i-1}+(\sigma)_{i-2}-\dots+(-1)^{i-1}(\sigma)_1+(-1)^i$$

oder, wenn mit $1.2.3\dots i$ multiplicirt wird (cfr. (2.)),

$$(22.)\qquad [\sigma-1]_i = [\sigma]_i-[i]_1[\sigma]_{i-1}+[i]_2[\sigma]_{i-2}-\dots+(-1)^{i-1}[i]_{i-1}[\sigma]_1+(-1)^i[i]_i.$$

Da $(-q)_i$ den Werth

$$\frac{(-q)(-q-1)\dots(-q-i+1)}{1.2\dots i} = (-1)^i\frac{(q+i-1)\dots q}{1.2\dots i} = (-1)^i(q+i-1)_i$$

hat, so kann $(-1)^i(i-\sigma)_i$ statt $(\sigma-1)_i$ geschrieben werden. Aus der soeben

erwähnten Gleichung folgt demnach

$$(i-\sigma)_i = 1-(\sigma)_1+(\sigma)_2-(\sigma)_3+\cdots+(-1)^i(\sigma)_i$$

oder, wenn $\sigma = -\omega$ gesetzt wird,

$$(23.)\qquad (\omega+i)_i = 1+(\omega)_1+(\omega+1)_2+(\omega+2)_3+\cdots(\omega+i-1)_i.$$

Für $\omega = q+k$, $i = l-k$ nimmt diese Formel die Gestalt

$$(23^a.)\qquad (q+l)_{l-k} = \sum_{\nu=k}^{\nu=l}(q+\nu-1)_{\nu-k}$$

an.

Der Binomialcoefficient $(\sigma-\tau)_i$ ist mit $(-1)^i(\tau-\sigma+i-1)_i$ identisch. Aber nach (21.) kann für $(\tau+i-\sigma-1)_i$ die Summe

$$(\tau+i)_i+(\tau+i)_{i-1}(-\sigma-1)_1+\cdots+(\tau+i)_{i-l}(-\sigma-1)_l+\cdots+(-\sigma-1)_i$$
$$= (\tau+i)_i-(\tau+i)_{i-1}(\sigma+1)_1+\cdots+(-1)^l(\tau+i)_{i-l}(\sigma+l)_l+\cdots+(-1)^i(\sigma+i)_i$$

gesetzt werden. Also gilt die Gleichung

$$(24.)\qquad (\sigma-\tau)_i = (-1)^i\sum_{l=0}^{l=i}(-1)^l(\tau+i)_{i-l}(\sigma+l)_l.$$

Die linke Seite von (24.) bleibt unverändert, wenn man $\sigma+\mu+1$, $\tau+\mu+1$ statt σ, τ schreibt. Daher ist

$$(\sigma-\tau)_i = \sum_{l=0}^{l=i}(-1)^{i-l}(\tau+i+\mu+1)_{i-l}(\sigma+l+\mu+1)_l.$$

Bei Anwendung der Bezeichnungen

$$i+\mu+1 = \nu,\quad l+\mu+1 = k$$

ergiebt sich hieraus, wenn unter μ eine beliebige positive ganze Zahl oder der Werth Null verstanden wird (unter der Voraussetzung $\nu > \mu$) die Formel

$$(24^a.)\qquad (\sigma-\tau)_{\nu-\mu-1} = \sum_{k=\mu+1}^{k=\nu}(-1)^{\nu-k}(\tau+\nu)_{\nu-k}(\sigma+k)_{k-\mu-1}.$$

Werden σ und τ einander gleich, während $i > 0$ ist, so verschwindet $(\sigma-\tau)_i$. Man nehme in (24.) sowohl σ als τ gleich der positiven ganzen Zahl μ. Dann ist

$$\sum_{l=0}^{l=i}(-1)^l(\mu+i)_{i-l}(\mu+l)_l = 0$$

oder wenn statt l ein Summationsindex k mittelst der Gleichung $l+\mu = k$ eingeführt wird,

$$\sum_{k=\mu}^{k=\mu+i}(-1)^k(\mu+i)_{\mu+i-k}(k)_{k-\mu} = 0.$$



Bezeichnet man also $\mu+i$ durch ν, so hat man die Formel

$$(25.)\qquad \sum_{k=\mu}^{k=\nu}(-1)^k(\nu)_{\nu-k}(k)_{k-\mu} = 0,$$

in der ν und μ im Uebrigen beliebige positive ganze Zahlen sind (einschliesslich des Werthes $\mu = 0$), jedoch $\nu > \mu$ vorausgesetzt wird. Im Fall $\nu = \mu$ nimmt (da dann auch $k = \mu = \nu$ ist) die linke Seite von (25.) den Werth $(-1)^\mu$ an. Aus (25.) wird durch die Substitution

$$\mu = \mu'-1,\quad \nu = \nu'-1,\quad k = k'-1$$

(unter Hinzufügung des Factors -1) die Gleichung

$$(25^a.)\qquad \sum_{k'=\mu'}^{k'=\nu'}(-1)^{k'}(\nu'-1)_{\nu'-k'}(k'-1)_{k'-\mu'} = 0$$

mit der Bedingung $\nu' > \mu'$ erhalten. Für $\nu' = \mu'$ wird die linke Seite von (25^a.) gleich $(-1)^{\mu'}$.

Man bemerke, dass nach (2.) und (19.)

$$(26.)\qquad [\sigma]_\nu(\tau)_\nu = (\sigma)_\nu[\tau]_\nu$$

ist. Ausserdem sei erwähnt, dass unter $[z]_\nu^+$ hier der Ausdruck

$$(27.)\qquad [z]_\nu^+ = z(z+1)(z+2)\dots(z+\nu-1),\quad [z]_0^+ = 1,$$

verstanden wird.

Aus der Theorie der Coefficienten $d_\nu^{(p)}$ kommen im Folgenden hauptsächlich zwei Formeln in Betracht, die ich im 102. Bande dieses Journales (§ 8 der genannten Abhandlung, Gleichungen (75.) und (77.), S. 123) abgeleitet habe. Sind p, k, $p-k$ positive ganze Zahlen, so bestehen zwischen den $p-k$ ersten Potenzen einer beliebigen Grösse z und den Factoriellen $[z]_1$, $[z]_2$, ..., $[z]_{p-k}$ die Gleichungen

$$(28.)\qquad \begin{cases} d_k^{(p)}+(k+1)_1 d_{k+1}^{(p)}[z]_1+(k+2)_2 d_{k+2}^{(p)}[z]_2+\dots+(p)_{p-k}d_p^{(p)}[z]_{p-k} \\ \qquad = d_k^{(p)}+(p)_1 d_k^{(p-1)}z+(p)_2 d_k^{(p-2)}z^2+\dots+(p)_{p-k}d_k^{(k)}z^{p-k} \end{cases}$$

und

$$(29.)\qquad \begin{cases} d_k^{(p)}+(k+2)_1 d_{k+1}^{(p)}[z]_1+(k+3)_2 d_{k+2}^{(p)}[z]_2+\dots+(p+1)_{p-k}d_p^{(p)}[z]_{p-k} \\ \qquad = d_k^{(p)}+(p+1)_1 d_k^{(p-1)}z+(p+1)_2 d_k^{(p-2)}z^2+\dots+(p+1)_{p-k}d_k^{(k)}z^{p-k}, \end{cases}$$

in denen $(k+i)_\nu$, $(p)_\nu$ etc. (nach (19.)) Binomialcoefficienten bedeuten.

Hängt ferner ein Ausdruck $\psi(i, k)$ von den positiven ganzen Zahlen i und k ab, so hat man die Formel

$$(30.)\qquad \sum_{k=\nu}^{k=n}\sum_{i=k}^{i=n}\psi(i,\ k) = \sum_{i=\nu}^{i=n}\sum_{k=\nu}^{k=i}\psi(i,\ k).$$

Denn beide Summationsindices i, k variiren von ν bis n, und es sollen mit einem bestimmten Werthe i alle Zahlen k, die $\leqq i$ sind, combinirt werden.

§ 3.

Um die Substitution (17.)

$$y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha} \mathfrak{T}\, dt$$

auf die Differentialgleichung (1.) anzuwenden, bringt man letztere zweckmässigerweise auf eine Form, welche in § 9 der oben erwähnten Abhandlung im 102. Bande dieses Journales (S. 128) angegeben ist. Es werde, wie dort, die Differentialgleichung

$$(31.)\quad \begin{cases} f_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + \{(\alpha+n-1)_1 f_n'(x) - f_{n-1}(x)\}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \\ + \{(\alpha+n-1)_2 f_n''(x) - (\alpha+n-2)_1 f_{n-1}'(x) + f_{n-2}(x)\}\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots \\ \cdots + \left\{\begin{matrix}(\alpha+n-1)_{n-\mu} f_n^{(n-\mu)}(x) - (\alpha+n-2)_{n-\mu-1} f_{n-1}^{(n-\mu-1)}(x) + \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-\mu-1}(\alpha+\mu)_1 f_{\mu+1}'(x) + (-1)^{n-\mu} f_\mu(x)\end{matrix}\right\}\dfrac{d^\mu y}{dx^\mu} + \cdots \\ \cdots + \left\{\begin{matrix}(\alpha+n-1)_{n-1} f_n^{(n-1)}(x) - (\alpha+n-2)_{n-2} f_{n-1}^{(n-2)}(x) + \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-2}(\alpha+1)_1 f_2'(x) + (-1)^{n-1} f_1(x)\end{matrix}\right\}\dfrac{dy}{dx} \\ + \left\{\begin{matrix}(\alpha+n-1)_n f_n^{(n)}(x) - (\alpha+n-2)_{n-1} f_{n-1}^{(n-1)}(x) + \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-2}(\alpha+1)_2 f_2''(x) + (-1)^{n-1}(\alpha)_1 f_1'(x)\end{matrix}\right\} y = 0 \end{cases}$$

betrachtet, in welcher (für $k = 1, 2, \ldots, n$) $f_k(x)$ eine ganze Function $k$ten oder niedrigeren Grades von x, $f_k^{(\nu)}(x)$ die νte Ableitung von $f_k(x)$, und $(\alpha+n-1)_k$ etc. Binomialcoefficienten bedeuten. Die Substitution (17.) verwandelt dieselbe, wenn der *Taylor*sche Satz

$$f_k(x) + f_k'(x)\frac{t-x}{1} + f_k''(x)\frac{(t-x)^2}{1.2} + \cdots + f_k^{(k)}(x)\frac{(t-x)^k}{[k]_k} = f_k(t)$$

berücksichtigt wird, in die Gleichung

$$(32.)\quad \begin{cases} [\alpha+1]_{n-1}^{+}\displaystyle\int_g^h (t-x)^{-\alpha-n} f_n(t)\mathfrak{T}\,dt - [\alpha+1]_{n-2}^{+}\int_g^h (t-x)^{-\alpha-n+1} f_{n-1}(t)\mathfrak{T}\,dt \\ + \cdots + (-1)^{n-2}[\alpha+1]_1^{+}\displaystyle\int_g^h (t-x)^{-\alpha-2} f_2(t)\mathfrak{T}\,dt \\ + (-1)^{n-1}\displaystyle\int_g^h (t-x)^{-\alpha-1} f_1(t)\mathfrak{T}\,dt = 0. \end{cases}$$

Die einzelnen Summanden von (32.) lassen sich durch wiederholte Anwendung der theilweisen Integration in der Art umformen, dass hinter dem Integralzeichen keine andere Potenz von $t-x$ als die $(-\alpha-1)$-te übrig bleibt. Man gelangt hierdurch zu der Gleichung

$$[M]_{t=h}-[M]_{t=g}$$
$$+\int_g^h (t-x)^{-\alpha-1}\left\{\begin{array}{c}\frac{d^{n-1}(f_n(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-1}}-\frac{d^{n-2}(f_{n-1}(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-2}}+\frac{d^{n-3}(f_{n-2}(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-3}} \\ -\cdots+(-1)^{n-2}\frac{d(f_2(t)\mathfrak{T})}{dt}+(-1)^{n-1}f_1(t)\mathfrak{T}\end{array}\right\}dt = 0,$$

in welcher M den Ausdruck

$$(33.)\quad M = \left\{\begin{array}{l}\sum_{k=2}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]_{k-2}^{+}(t-x)^{-\alpha-k+1}f_k(t)\mathfrak{T} \\ +\sum_{k=3}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]_{k-3}^{+}(t-x)^{-\alpha-k+2}\frac{d(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt}+\cdots \\ \cdots+\sum_{k=n-1}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]_{k-n+1}^{+}(t-x)^{-\alpha-k+n-2}\frac{d^{n-3}(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-3}} \\ \qquad -(t-x)^{-\alpha-1}\frac{d^{n-2}(f_n(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-2}}\end{array}\right.$$

bezeichnet. Es werde nun die Grösse $\mathfrak{T}$ als Function von t durch die lineare Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung

$$(34.)\quad \left\{\begin{array}{c}\frac{d^{n-1}(f_n(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-1}}-\frac{d^{n-2}(f_{n-1}(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-2}}+\frac{d^{n-3}(f_{n-2}(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-3}} \\ -\cdots+(-1)^{n-2}\frac{d(f_2(t)\mathfrak{T})}{dt}+(-1)^{n-1}f_1(t)\mathfrak{T} = 0\end{array}\right.$$

bestimmt, und für g, h die Bedingung

$$(35.)\quad [M]_{t=h}-[M]_{t=g} = 0$$

festgesetzt. Dann stellt das bestimmte Integral (17.) eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (31.) dar, so dass letztere auf die Differentialgleichung (34.) zurückgeführt ist*).

Diese Rechnung überträgt sich auf die Differentialgleichung (1.), weil bei passender Wahl der Functionen $f_k(x)$ und der Constante α die Gleichung (31.) sich in die Gleichung (1.) verwandelt. Es werde, für $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$(36.)\quad f_k(x) = -G_k x^k + H_k x^{k-1}$$

*) S. Bd. 102 dieses Journales, S. 128—130.

gesetzt, wo G_k und H_k Constante bezeichnen. Dann geht in (31.) der Factor von $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$, welcher

$$\sum_{k=\mu}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha+k-1)_{k-\mu}f_k^{(k-\mu)}(x)$$

geschrieben werden kann, in den Ausdruck

$$-x^\mu\sum_{k=\mu}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha+k-1)_{k-\mu}[k]_{k-\mu}G_k+x^{\mu-1}\sum_{k=\mu}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha+k-1)_{k-\mu}[k-1]_{k-\mu}H_k$$

über; $[k]_{k-\mu}$, $[k-1]_{k-\mu}$ bedeuten nach (2.) die Producte

$$k(k-1)(k-2)\dots(\mu+1),\quad (k-1)(k-2)(k-3)\dots\mu.$$

Andererseits ist in der Gleichung (1.), deren sämmtliche Summanden man sich nach links gebracht denken möge, der Coefficient von $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ gleich

$$-K_{m-\mu}x^\mu+L_{n-\mu}x^{\mu-1},$$

wenn man unter $K_{m-\mu}$ im Fall $\mu>m$ den Werth Null und unter K_0 und L_0 den Werth Eins versteht. Die Factoren von $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ in (31.) und in (1.) werden also gleichlautend (für $\mu=1,2,\dots,n$), sobald die Gleichungen

$$(37.)\qquad \sum_{k=\mu}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha+k-1)_{k-\mu}[k]_{k-\mu}G_k = K_{m-\mu},$$

$$(38.)\qquad \sum_{k=\mu}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha+k-1)_{k-\mu}[k-1]_{k-\mu}H_k = L_{n-\mu}$$

erfüllt sind.

Die Gleichungen (37.) und (38.) dienen zur Bestimmung der Grössen G_k und H_k. Man schliesst zunächst, dass

$$(39.)\qquad G_k = 0 \quad \text{für} \quad k>m$$

ist. Im Uebrigen findet man

$$(40.)\qquad G_k = \sum_{\nu=k}^{\nu=m}(-1)^{n-\nu}(\nu)_{\nu-k}[\alpha+\nu-1]_{\nu-k}K_{m-\nu} \qquad \text{(für } k=1,2,\dots,m)$$

und

$$(41.)\qquad \begin{cases} H_k = \sum_{\nu=k}^{\nu=n}(-1)^{n-\nu}(\nu-1)_{\nu-k}[\alpha+\nu-1]_{\nu-k}L_{n-\nu}, \\ H_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}(-1)^{n-\nu}[\alpha+\nu-1]_{\nu-1}L_{n-\nu}. \end{cases} \qquad \text{(für } k=2,3,\dots,n)$$

Es ist leicht zu bestätigen, dass die letzteren Werthe den Bedingungen (37.) und (38.) (für $\mu=1,2,\dots,n$) entsprechen. In (37.) kann,

wegen (39.), die obere Grenze der Summation gleich m (statt gleich n) genommen werden. Im Fall $\mu = m$ ergiebt sich aus (37.) die Gleichung

$$(-1)^{n-m} G_m = K_0 = 1, \quad G_m = (-1)^{n-m},$$

welche mit (40.) für $k = m$ übereinstimmt. Ebenso folgt sowohl aus der Gleichung (38.) für $\mu = n$, als auch aus der Gleichung (41.) für $k = n$, dass

$$H_n = L_0 = 1$$

ist. Die linke Seite von (37.), in der jetzt $\mu < m$ vorausgesetzt werden darf, geht durch die Substitution der Werthe (40.), wenn zugleich, nach (26.), $[\alpha+k-1]_{k-\mu}(k)_{k-\mu}$ statt $(\alpha+k-1)_{k-\mu}[k]_{k-\mu}$ geschrieben wird, in die Doppelsumme

$$\sum_{k=\mu}^{k=m} (-1)^{n-k}[\alpha+k-1]_{k-\mu}(k)_{k-\mu} \sum_{\nu=k}^{\nu=m} (-1)^{n-\nu}(\nu)_{\nu-k}[\alpha+\nu-1]_{\nu-k} K_{m-\nu}$$

über; und hieraus entsteht durch Berücksichtigung der Formel (30.) und der Identität

$$\begin{aligned}[\alpha+\nu-1]_{\nu-k}[\alpha+k-1]_{k-\mu} &= (\alpha+\nu-1)(\alpha+\nu-2)\dots(\alpha+k)(\alpha+k-1)\dots(\alpha+\mu) \\ &= [\alpha+\nu-1]_{\nu-\mu}\end{aligned}$$

der Ausdruck:

$$\sum_{\nu=\mu}^{\nu=m} (-1)^{\nu}[\alpha+\nu-1]_{\nu-\mu} K_{m-\nu} \sum_{k=\mu}^{k=\nu} (-1)^{k}(\nu)_{\nu-k}(k)_{k-\mu}.$$

Nach (25.) ist aber

$$\sum_{k=\mu}^{k=\nu} (-1)^{k}(\nu)_{\nu-k}(k)_{k-\mu} = \begin{cases} 0 \text{ im Fall } \nu > \mu, \\ (-1)^{\mu} \text{ im Fall } \nu = \mu. \end{cases}$$

Somit bleibt von der betrachteten Doppelsumme nur der zu $\nu = \mu$ gehörige Term

$$(-1)^{\mu}[\alpha+\mu-1]_0 K_{m-\mu}(-1)^{\mu}, \; = \; K_{m-\mu},$$

übrig.

Eine analoge Rechnung gilt für die Grössen H_k. Die linke Seite von (38.), in der zunächst $\mu > 1$ vorausgesetzt werden möge, lautet, wenn man für H_k die Werthe (41.) substituirt und die Formel (30.) anwendet,

$$\sum_{\nu=\mu}^{\nu=n} (-1)^{\nu}[\alpha+\nu-1]_{\nu-\mu} L_{n-\nu} \sum_{k=\mu}^{k=\nu} (-1)^{k}(\nu-1)_{\nu-k}(k-1)_{k-\mu}.$$

Da nun nach (25*.)

$$\sum_{k=\mu}^{k=\nu} (-1)^{k}(\nu-1)_{\nu-k}(k-1)_{k-\mu} = \begin{cases} 0 \text{ im Fall } \nu > \mu, \\ (-1)^{\mu} \text{ im Fall } \nu = \mu \end{cases}$$

ist, so reducirt sich die obige Doppelsumme auf den Term $L_{n-\mu}$. Ist μ gleich 1, so ergiebt sich für die linke Seite von (38.), wenn das zu $k=\mu=1$ gehörige Glied für sich geschrieben wird, in Folge der Gleichungen (41.) der Ausdruck:

$$(-1)^{n-1}\Big\{(-1)^{n-1}L_{n-1}+\sum_{\nu=2}^{\nu=n}(-1)^{n-\nu}[\alpha+\nu-1]_{\nu-1}L_{n-\nu}\Big\}$$
$$+\sum_{k=2}^{k=n}(-1)^{n-k}[\alpha+k-1]_{k-1}\sum_{\nu=k}^{\nu=n}(-1)^{n-\nu}(\nu-1)_{\nu-k}[\alpha+\nu-1]_{\nu-k}L_{n-\nu}.$$

Derselbe nimmt durch die Formel (30.), da die einfache Summe nach ν sich dann mit der Doppelsumme vereinigen lässt (die Grenze wird $k=1$), die Gestalt

$$L_{n-1}+\sum_{\nu=2}^{\nu=n}(-1)^{\nu}[\alpha+\nu-1]_{\nu-1}L_{n-\nu}\sum_{k=1}^{k=\nu}(-1)^{k}(\nu-1)_{\nu-k}$$

an. Die neben L_{n-1} stehende Doppelsumme verschwindet aber, da nach der Formel (25^a.) (in der $\mu'=1$, $\nu'=\nu$ genommen wird)

$$\sum_{k=1}^{k=\nu}(-1)^{k}(\nu-1)_{\nu-k} = 0$$

ist.

Hiermit ist bewiesen, dass die in (39.), (40.), (41.) bezeichneten Werthe der Constanten G_k und H_k die Bedingungen (37.) und (38.) für $\mu=1, 2, \ldots, n$ erfüllen.

Damit die Differentialgleichungen (1.) und (31.) identisch werden, ist nun noch erforderlich, dass die Coefficienten von y einander gleich seien. Dies führt zu der Bedingungsgleichung

$$(42.)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha+k-1)_{k}[k]_{k}G_{k} = K_{m},$$

durch welche die Constante α bestimmt wird. Substituirt man in die linke Seite von (42.) die Werthe (39.), (40.) der Grössen G_k, so entsteht aus derselben (nach Berücksichtigung von (30.)) die Doppelsumme

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m}(-1)^{\nu}[\alpha+\nu-1]_{\nu}K_{m-\nu}\sum_{k=1}^{k=\nu}(-1)^{k}(\nu)_{\nu-k},$$

für die, da aus (25.) (im Fall $\mu=0$) die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{k=\nu}(-1)^{k}(\nu)_{\nu-k}=0,\quad \text{d. h.}\quad \sum_{k=1}^{k=\nu}(-1)^{k}(\nu)_{\nu-k}=-1$$

folgt, die einfache Summe

$$-\sum_{\nu=1}^{\nu=m}(-1)^{\nu}[\alpha+\nu-1]_{\nu}K_{m-\nu}$$

gesetzt werden kann. Nach (2.) ist aber

$$(-1)^\nu[\alpha+\nu-1]_\nu = (-1)^\nu(\alpha+\nu-1)(\alpha+\nu-2)\dots(\alpha+1)\alpha$$
$$= (-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-\nu+1) = [-\alpha]_\nu.$$

Daher lautet die Gleichung (42.)

$$[-\alpha]_m+K_1[-\alpha]_{m-1}+K_2[-\alpha]_{m-2}+\cdots+K_{m-1}[-\alpha]_1+K_m = 0$$

oder, wenn die Gleichungen (3.) und (5.) beachtet werden (für $z=-\alpha$),

$$(\alpha_1-\alpha)(\alpha_2-\alpha)\dots(\alpha_m-\alpha) = 0.$$

Der Bedingung (42.) ist also genügt, sobald α einem der Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ gleich wird. Es möge hier

$$(43.) \qquad \alpha = \alpha_m$$

genommen werden.

§ 4.

Die Einführung des Integrales (17.) in die Differentialgleichung (1.) liefert, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, für $\mathfrak{T}$ eine Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung, die aus (34.) erhalten wird, wenn man die Functionen $f_1, \dots, f_n$ durch die Gleichungen (36.), (39.), (40.), (41.) und die Constante α durch (43.) definirt. Es werde nun

$$(44.) \qquad \mathfrak{T} = t^\varepsilon T$$

gesetzt, wo ε eine Constante bedeutet. Dann gilt für T die Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n-1}(-1)^{n-\varkappa-1}\frac{d^\varkappa\{f_{\varkappa+1}(t)t^\varepsilon T\}}{dt^\varkappa}+(-1)^{n-1}f_1(t)t^\varepsilon T = 0$$

d. h.

$$(45.) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n-1}(-1)^{n-\varkappa-1}\frac{d^\varkappa\{-G_{\varkappa+1}t^{\varepsilon+\varkappa+1}T+H_{\varkappa+1}t^{\varepsilon+\varkappa}T\}}{dt^\varkappa}+(-1)^{n-1}\{-G_1t^{\varepsilon+1}+H_1t^\varepsilon\}T = 0.$$

Aus dem bekannten Satze über die höheren Differentialquotienten eines Productes ergiebt sich (bei Anwendung der Bezeichnungen (2.) und (19.))

$$(46.) \qquad \frac{d^\varkappa(t^\lambda T)}{dt^\varkappa} = \begin{cases} t^\lambda\frac{d^\varkappa T}{dt^\varkappa}+(\varkappa)_1[\lambda]_1t^{\lambda-1}\frac{d^{\varkappa-1}T}{dt^{\varkappa-1}}+(\varkappa)_2[\lambda]_2t^{\lambda-2}\frac{d^{\varkappa-2}T}{dt^{\varkappa-2}} \\ +\cdots+(\varkappa)_{\varkappa-\mu}[\lambda]_{\varkappa-\mu}t^{\lambda-\varkappa+\mu}\frac{d^\mu T}{dt^\mu}+\cdots+[\lambda]_\varkappa t^{\lambda-\varkappa}T. \end{cases}$$

Demnach hat in (45.) der Differentialquotient $\frac{d^\mu T}{dt^\mu}$ für $\mu = 1, 2, \dots, n-1$

den Factor

$$-t^{\varepsilon+\mu+1}\sum_{\varkappa=\mu}^{\varkappa=n-1}(-1)^{n-\varkappa-1}(\varkappa)_{\varkappa-\mu}[\varepsilon+\varkappa+1]_{\varkappa-\mu}G_{\varkappa+1}$$
$$+t^{\varepsilon+\mu}\sum_{\varkappa=\mu}^{\varkappa=n-1}(-1)^{n-\varkappa-1}(\varkappa)_{\varkappa-\mu}[\varepsilon+\varkappa]_{\varkappa-\mu}H_{\varkappa+1}$$

und die Grösse T den Factor

$$-t^{\varepsilon+1}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}(-1)^{n-\varkappa-1}[\varepsilon+\varkappa+1]_\varkappa G_{\varkappa+1}+t^{\varepsilon}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}(-1)^{n-\varkappa-1}[\varepsilon+\varkappa]_\varkappa H_{\varkappa+1}.$$

In letzteren Ausdrücken können die Summen, welche die Grössen $G_{\varkappa+1}$ enthalten, zwischen den Grenzen $\varkappa=\mu$ und $\varkappa=m-1$ (statt $n-1$) genommen werden, da $G_{m+1}, G_{m+2}, \dots$ nach (39.) gleich Null sind. Man bezeichne durch $K'_{m-\mu-1}$ und $L'_{n-\mu-1}$ die Constanten

$$(47.)\quad K'_{m-\mu-1} = \sum_{\varkappa=\mu}^{\varkappa=m-1}(-1)^{n-\varkappa-1}(\varkappa)_{\varkappa-\mu}[\varepsilon+\varkappa+1]_{\varkappa-\mu}G_{\varkappa+1}\qquad (\text{für } \mu=1,2,\dots,m-1)$$

und

$$(48.)\quad L'_{n-\mu-1} = \sum_{\varkappa=\mu}^{\varkappa=n-1}(-1)^{n-\varkappa-1}(\varkappa)_{\varkappa-\mu}[\varepsilon+\varkappa]_{\varkappa-\mu}H_{\varkappa+1},\qquad (\text{für } \mu=1,2,\dots,n-1)$$

ferner durch K'_{m-1} und L'_{n-1} die Constanten

$$(49.)\quad K'_{m-1} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m-1}(-1)^{n-\varkappa-1}[\varepsilon+\varkappa+1]_\varkappa G_{\varkappa+1},$$

$$(50.)\quad L'_{n-1} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}(-1)^{n-\varkappa-1}[\varepsilon+\varkappa]_\varkappa H_{\varkappa+1}.$$

Dann nimmt die Gleichung (45.), nach Division mit $t^{\varepsilon+1}$, die Form

$$(51.)\quad \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1}L'_{n-\mu-1}t^{\mu-1}\frac{d^\mu T}{dt^\mu}+\frac{L'_{n-1}T}{t} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1}K'_{m-\mu-1}t^\mu\frac{d^\mu T}{dt^\mu}+K'_{m-1}T$$

an. Für $\mu=m-1$, resp. $\mu=n-1$ folgt aus (47.), (48.) (da $G_m=(-1)^{n-m}$ und $H_n=1$ ist)

$$K'_0=1,\quad L'_0=1.$$

Man verfügt nunmehr über die Constante ε, welche durch die Substitution (44.) eingeführt wurde, in der Art, dass man

$$(52.)\quad L'_{n-1} = 0$$

setzt. Hierdurch ergiebt sich aus (51.) die Gleichung

$$(53.)\quad \begin{cases} t^{n-2}\frac{d^{n-1}T}{dt^{n-1}}+L'_1t^{n-3}\frac{d^{n-2}T}{dt^{n-2}}+L'_2t^{n-4}\frac{d^{n-3}T}{dt^{n-3}} \\ \quad +\dots+L'_{n-\mu-1}t^{\mu-1}\frac{d^\mu T}{dt^\mu}+\dots+L'_{n-3}t\frac{d^2T}{dt^2}+L'_{n-2}\frac{dT}{dt} \\ = t^{m-1}\frac{d^{m-1}T}{dt^{m-1}}+K'_1t^{m-2}\frac{d^{m-2}T}{dt^{m-2}}+K'_2t^{m-3}\frac{d^{m-3}T}{dt^{m-3}} \\ \quad +\dots+K'_{m-\mu-1}t^\mu\frac{d^\mu T}{dt^\mu}+\dots+K'_{m-2}t\frac{dT}{dt}+K'_{m-1}T. \end{cases}$$

Man hat also in der That für T eine Differentialgleichung gewonnen, welche aus (1.) entsteht, wenn die Grössen n, m, x, y, K_1, L_1, ... bezw. durch $n-1$, $m-1$, t, T, K_1', L_1', ... ersetzt werden.

§ 5.

Die Parameter der F-Reihen $(n-1)$-ter Ordnung, welche der Differentialgleichung (53.) genügen, sind, wie im Folgenden gezeigt werden soll, lineare ganze Functionen der Constanten α_i, ϱ_i. Der Beweis dieses Satzes und die Herstellung der bezüglichen Werthe der Parameter erfordert die Ausführung gewisser Hülfsrechnungen. Es werden zunächst die Ausdrücke der Constanten $G_1, G_2, \dots$, sodann die Ausdrücke der Constanten $K_1', K_2', \dots$, $L_1', L_2', \dots$ einer Umformung unterzogen, wodurch zugleich der Werth der durch (52.) bestimmten Constante ε ermittelt wird.

Die Grössen $K_1, \dots, K_m$ hängen durch die Gleichungen (3.) und (5.) von $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ab. Für $\alpha_m = 0$ ist $K_m = A_m = 0$. Es mögen nun durch $J_1, \dots, J_{m-1}$ diejenigen Werthe bezeichnet werden, in welche $K_1, \dots$, K_{m-1} im Falle $\alpha_m = 0$ übergehen. Unter J_0 werde der Werth 1 verstanden. Definirt man $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$ als die elementaren symmetrischen Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ und setzt demgemäss (für ein beliebiges z)

$$(54.)\quad z^{m-1}+C_1 z^{m-2}+C_2 z^{m-3}+\dots+C_{m-2}z+C_{m-1} = (z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\dots(z+\alpha_{m-1}),$$

so gilt nach (10.) (für $\mu = 1, 2, \dots, m-1$) die Gleichung

$$(55.)\quad J_{m-\mu} = \begin{cases} d_{\mu-1}^{(\mu-1)} C_{m-\mu} + d_{\mu-1}^{(\mu)} C_{m-\mu-1} + d_{\mu-1}^{(\mu+1)} C_{m-\mu-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + d_{\mu-1}^{(l-1)} C_{m-l} + \cdots + d_{\mu-1}^{(m-2)} C_1 + d_{\mu-1}^{(m-1)}. \end{cases}$$

Denn für $\alpha_m = 0$ reduciren sich $A_1, \dots, A_{m-1}$ auf $C_1, \dots, C_{m-1}$. Die Betrachtung des Falles $\alpha_m = 0$ lässt ferner aus (3.) die Gleichung

$$[z]_m + J_1[z]_{m-1} + J_2[z]_{m-2} + \dots + J_{m-2}[z]_2 + J_{m-1}[z]_1$$
$$= z^m + C_1 z^{m-1} + C_2 z^{m-2} + \dots + C_{m-2} z^2 + C_{m-1} z$$

entstehen, welche nach Division durch z und nach Berücksichtigung von (54.) die Gestalt

$$(56.)\quad \begin{cases} [z-1]_{m-1} + J_1[z-1]_{m-2} + J_2[z-1]_{m-3} + \dots + J_{m-2}[z-1]_1 + J_{m-1} \\ \qquad = (z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\dots(z+\alpha_{m-1}) \end{cases}$$

annimmt. Multiplicirt man (56.) mit $z+\alpha_m$, so stimmt die rechte Seite mit der rechten Seite von (5.), also auch mit der linken Seite von (3.) überein,

während man links den Ausdruck

$$[z]_m+J_1[z]_{m-1}+\cdots+\alpha_m\{[z-1]_{m-1}+J_1[z-1]_{m-2}+\cdots\}$$

erhält. Somit ergiebt sich (für ein beliebiges z)

$$(57.)\quad \begin{cases} [z]_m+K_1[z]_{m-1}+\cdots+K_{m-\nu}[z]_\nu+\cdots+K_{m-1}[z]_1+K_m \\ \qquad = [z]_m+J_1[z]_{m-1}+\cdots+J_{m-\nu}[z]_\nu+\cdots+J_{m-1}[z]_1 \\ \qquad +\alpha_m\{[z-1]_{m-1}+J_1[z-1]_{m-2}+\cdots+J_{m-l-1}[z-1]_l+\cdots+J_{m-1}\}. \end{cases}$$

Auf die Factoriellen $[z-1]_{m-1}$, $[z-1]_{m-2}$, ... wendet man die Gleichung (22.)

$$[z-1]_l = [z]_l-[l]_1[z]_{l-1}+\cdots+(-1)^{l-\nu}[l]_{l-\nu}[z]_\nu+\cdots+(-1)^l[l]_l$$

an. Dann führt die Vergleichung der Coefficienten von $[z]_\nu$ auf der linken und der rechten Seite von (57.) zu der Formel

$$(58.)\qquad K_{m-\nu} = J_{m-\nu}+\alpha_m\sum_{l=\nu}^{l=m-1}(-1)^{l-\nu}[l]_{l-\nu}J_{m-l-1}$$

für $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$.

Um die Constanten G_k umzuformen, giebt man der Gleichung (40.), für $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$, unter Abtrennung eines Summandus die Form

$$G_k = (-1)^{n-m}(m)_{m-k}[\alpha+m-1]_{m-k}+\sum_{\nu=k}^{\nu=m-1}(-1)^{n-\nu}(\nu)_{\nu-k}[\alpha+\nu-1]_{\nu-k}K_{m-\nu}$$

und setzt statt $K_{m-\nu}$ die Summe (58.), statt α den Werth α_m ein. Hierdurch entsteht, nach Benutzung der Formeln (26.) und (30.), für G_k der Ausdruck

$$(-1)^{n-m}(m)_{m-k}[\alpha_m+m-1]_{m-k}+\sum_{\nu=k}^{\nu=m-1}(-1)^{n-\nu}(\nu)_{\nu-k}[\alpha_m+\nu-1]_{\nu-k}J_{m-\nu}$$
$$+\alpha_m\sum_{l=k}^{l=m-1}(-1)^{n-l}J_{m-l-1}\sum_{\nu=k}^{\nu=l}[l]_{l-\nu}[\nu]_{\nu-k}(\alpha_m+\nu-1)_{\nu-k}.$$

Der erste Term lässt sich mit der einfachen Summe (nach ν) verbinden, da er dem Werthe $\nu=m$ entspricht. Man trennt jedoch zugleich von der genannten Summe den zu $\nu=k$ gehörigen Term $(-1)^{n-k}J_{m-k}$ ab und schreibt ausserdem (nach (2.))

$$[\alpha_m+\nu-1]_{\nu-k} = [\alpha_m+\nu-1]_{\nu-k-1}(\alpha_m+k).$$

Ferner ist zu beachten, dass die obige Doppelsumme, wenn

$$[l]_{l-\nu}[\nu]_{\nu-k} = l(l-1)\ldots(\nu+1)\nu\ldots(k+1) = [l]_{l-k}$$

substituirt wird, in

$$\alpha_m\sum_{l=k}^{l=m-1}(-1)^{n-l}[l]_{l-k}J_{m-l-1}\sum_{\nu=k}^{\nu=l}(\alpha_m+\nu-1)_{\nu-k}$$



übergeht, wofür wegen der Identität

$$\sum_{\nu=k}^{\nu=l}(\alpha_m+\nu-1)_{\nu-k} = (\alpha_m+l)_{l-k}$$

(cfr. (23^a.)) die einfache Summe

$$\alpha_m \sum_{l=k}^{l=m-1}(-1)^{n-l}[l]_{l-k}(\alpha_m+l)_{l-k}J_{m-l-1}$$

gesetzt werden kann. Indem man statt l einen Index $\nu' = l+1$ einführt und wiederum die Gleichung (26.) anwendet, erhält man für G_k den Ausdruck

$$G_k = \begin{cases} (-1)^{n-k}J_{m-k}+(\alpha_m+k)\sum_{\nu=k+1}^{\nu=m}(-1)^{n-\nu}(\nu)_{\nu-k}[\alpha_m+\nu-1]_{\nu-k-1}J_{m-\nu} \\ \qquad +\alpha_m\sum_{\nu'=k+1}^{\nu'=m}(-1)^{n-\nu'+1}(\nu'-1)_{\nu'-k-1}[\alpha_m+\nu'-1]_{\nu'-k-1}J_{m-\nu'} \end{cases}$$

oder

$$G_k = \begin{cases} (-1)^{n-k}J_{m-k}+k\sum_{\nu=k+1}^{\nu=m}(-1)^{n-\nu}(\nu)_{\nu-k}[\alpha_m+\nu-1]_{\nu-k-1}J_{m-\nu} \\ \qquad +\alpha_m\sum_{\nu=k+1}^{\nu=m}(-1)^{n-\nu}\{(\nu)_{\nu-k}-(\nu-1)_{\nu-k-1}\}[\alpha_m+\nu-1]_{\nu-k-1}J_{m-\nu}. \end{cases}$$

Aber einerseits ist

$$k(\nu)_{\nu-k} = \frac{\nu(\nu-1)\dots(k+1)k}{1.2\dots(\nu-k)} = \nu(\nu-1)_{\nu-k},$$

andererseits folgt aus (20.)

$$(\nu)_{\nu-k}-(\nu-1)_{\nu-k-1} = (\nu-1)_{\nu-k},$$

also ergiebt sich

$$G_k = (-1)^{n-k}J_{m-k}+\sum_{\nu=k+1}^{\nu=m}(-1)^{n-\nu}(\nu-1)_{\nu-k}(\alpha_m+\nu)[\alpha_m+\nu-1]_{\nu-k-1}J_{m-\nu}.$$

Wird nun $(\alpha_m+\nu)[\alpha_m+\nu-1]_{\nu-k-1}$ durch $[\alpha_m+\nu]_{\nu-k}$ ersetzt (nach (2.)), so kann im Falle $k>1$ der erste Term der rechten Seite unmittelbar mit der daneben stehenden Summe (die dann zwischen den Grenzen k und m zu nehmen ist) vereinigt werden. Das Nämliche findet im Falle $k=1$ statt, nachdem für $(\nu-1)_{\nu-k}$ der Werth 1 gesetzt worden ist. Man gelangt auf diese Weise zu den Gleichungen

$$(59.) \qquad G_k = \sum_{\nu=k}^{\nu=m}(-1)^{n-\nu}(\nu-1)_{\nu-k}[\alpha_m+\nu]_{\nu-k}J_{m-\nu},$$

für $k=2, 3, \dots, m-1$, und

$$(60.) \qquad G_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=m}(-1)^{n-\nu}[\alpha_m+\nu]_{\nu-1}J_{m-\nu}.$$

§ 6.

Die in der Differentialgleichung (53.) vorkommenden Constanten $K'_1, \ldots, K'_{m-1}, L'_1, \ldots, L'_{n-2}$ wurden durch die Gleichungen (47.) bis (50.) definirt. Man führt in letztere Gleichungen einen neuen Summationsindex $k = \varkappa + 1$ ein und substituirt hierauf in (47.) und (49.) die Werthe (59.), (60.) für die Coefficienten G_k, in (48.) und (50.) die Werthe (41.) für die Coefficienten H_k. Es folgt dann aus (47.) (bei Berücksichtigung von (26.))

$$K'_{m-\mu-1} = \sum_{k=\mu+1}^{k=m} (-1)^{n-k}[k-1]_{k-\mu-1}(\varepsilon+k)_{k-\mu-1} \sum_{\nu=k}^{\nu=m} (-1)^{n-\nu}[\nu-1]_{\nu-k}(\alpha_m+\nu)_{\nu-k}J_{m-\nu}$$

oder, wenn die Formel (30.) angewendet und

$$[\nu-1]_{\nu-k}[k-1]_{k-\mu-1} = (\nu-1)(\nu-2)\ldots k(k-1)\ldots(\mu+1) = [\nu-1]_{\nu-\mu-1}$$

gesetzt wird,

$$K'_{m-\mu-1} = \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} [\nu-1]_{\nu-\mu-1}J_{m-\nu} \sum_{k=\mu+1}^{k=\nu} (-1)^{\nu-k}(\alpha_m+\nu)_{\nu-k}(\varepsilon+k)_{k-\mu-1}.$$

Nun ist nach (24ª.)

$$\sum_{k=\mu+1}^{k=\nu} (-1)^{\nu-k}(\alpha_m+\nu)_{\nu-k}(\varepsilon+k)_{k-\mu-1} = (\varepsilon-\alpha_m)_{\nu-\mu-1}.$$

Nennt man also Θ die Constante

$$\Theta = \varepsilon-\alpha_m, \tag{61.}$$

so ergiebt sich (nach nochmaliger Benutzung der Formel (26.)) die Gleichung

$$K'_{m-\mu-1} = \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} (\nu-1)_{\nu-\mu-1}[\Theta]_{\nu-\mu-1}J_{m-\nu}, \tag{62.}$$

in der μ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, m-1$ bedeutet.

In derselben Weise leitet man aus (48.) die Gleichung

$$L'_{n-\mu-1} = \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=n} [\nu-1]_{\nu-\mu-1}L_{n-\nu} \sum_{k=\mu+1}^{k=\nu} (-1)^{\nu-k}(\alpha_m+\nu-1)_{\nu-k}(\varepsilon+k-1)_{k-\mu-1}$$

ab, deren rechte Seite sich auf eine einfache Summe reducirt, da nach (24ª.)

$$\sum_{k=\mu+1}^{k=\nu} (-1)^{\nu-k}(\alpha_m-1+\nu)_{\nu-k}(\varepsilon-1+k)_{k-\mu-1} = (\varepsilon-\alpha_m)_{\nu-\mu-1} = (\Theta)_{\nu-\mu-1}$$

ist. Man findet demgemäss

$$L'_{n-\mu-1} = \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=n} (\nu-1)_{\nu-\mu-1}[\Theta]_{\nu-\mu-1}L_{n-\nu} \tag{63.}$$

für $\mu = 1, 2, \ldots, n-1$.

Es bleibt übrig, die Ausdrücke der Constanten K'_{m-1} und L'_{n-1} zu behandeln. Trennt man von der Summe (50.) den (zu $k=0$ gehörigen)

Term $(-1)^{n-1}H_1$ ab, und setzt $k = \varkappa+1$, so hat man

$$L'_{n-1} = (-1)^{n-1}H_1 + \sum_{k=2}^{k=n}(-1)^{n-k}[\varepsilon+k-1]_{k-1}H_k$$

oder, wegen (40.), (41.) (wo der zu $\nu = 1$ gehörige Term für sich geschrieben wird) und (30.), wenn zugleich die Identität

$$[\varepsilon+k-1]_{k-1}[\nu-1]_{\nu-k} = (\varepsilon+k-1)_{k-1}[k-1]_{k-1}[\nu-1]_{\nu-k} = (\varepsilon+k-1)_{k-1}[\nu-1]_{\nu-1}$$

beachtet wird,

$$L'_{n-1} = \begin{cases} L_{n-1} + \sum_{\nu=2}^{\nu=n}(-1)^{\nu-1}[\alpha_m+\nu-1]_{\nu-1}L_{n-\nu} \\ + \sum_{\nu=2}^{\nu=n}[\nu-1]_{\nu-1}L_{n-\nu}\sum_{k=2}^{k=\nu}(-1)^{\nu-k}(\alpha_m+\nu-1)_{\nu-k}(\varepsilon+k-1)_{k-1}. \end{cases}$$

Hierin kann die einfache Summe mit der Doppelsumme (in der k dann die Grenzen 1 und ν erhält) vereinigt werden, worauf die Formel (24ᵃ.) (für $\mu = 0$)

$$\sum_{k=1}^{k=\nu}(-1)^{\nu-k}(\alpha_m-1+\nu)_{\nu-k}(\varepsilon-1+k)_{k-1} = (\varepsilon-\alpha_m)_{\nu-1} = (\Theta)_{\nu-1}$$

ergiebt. Somit ist

$$L'_{n-1} = L_{n-1} + \sum_{\nu=2}^{\nu=n}[\nu-1]_{\nu-1}(\Theta)_{\nu-1}L_{n-\nu} = L_{n-1} + \sum_{\nu=2}^{\nu=n}[\Theta]_{\nu-1}L_{n-\nu}$$

oder

$$L'_{n-1} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}[\Theta]_{\nu-1}L_{n-\nu}. \tag{64.}$$

Durch eine genau analoge Rechnung wird aus (49.) die Gleichung

$$K'_{m-1} = \sum_{\nu=1}^{\nu=m}[\Theta]_{\nu-1}J_{m-\nu} \tag{65.}$$

gewonnen, in der Θ wiederum die Constante $\varepsilon-\alpha_m$ bezeichnet.

Nach (52.) soll die Grösse L'_{n-1} verschwinden. Da nun nach (4.) und (6.)

$$[\Theta]_{n-1}+L_1[\Theta]_{n-2}+L_2[\Theta]_{n-3}+\cdots+L_{n-2}[\Theta]_1+L_{n-1} = (\Theta+\varrho_1)(\Theta+\varrho_2)\dots(\Theta+\varrho_{n-1})$$

ist, so geht aus (52.) und (64.) die Gleichung

$$(\Theta+\varrho_1)(\Theta+\varrho_2)\dots(\Theta+\varrho_{n-1}) = 0$$

hervor. Man wähle

$$\Theta = \varepsilon-\alpha_m = -\varrho_{n-1}, \tag{66.}$$

also

$$\varepsilon = \alpha_m-\varrho_{n-1}.$$

Das Integral (17.) nimmt in Folge von (43.), (44.) und (66.) die Gestalt

$$y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha_m}t^{\alpha_m-\varrho_{n-1}-1}T\,dt \tag{67.}$$

an.

§ 7.

Nachdem die Gleichungen (62.), (63.), (65.) abgeleitet sind, ist der Nachweis, dass die Parameter der zu (53.) gehörigen F-Reihen linear von $\alpha_1, \varrho_1, \dots$ abhängen, leicht zu führen. Man nenne

$$(68.)\quad \begin{cases} \alpha'_1 = \alpha_1 - \varrho_{n-1} + 1, \quad \alpha'_2 = \alpha_2 - \varrho_{n-1} + 1, \quad \dots, \quad \alpha'_{m-1} = \alpha_{m-1} - \varrho_{n-1} + 1, \\ \varrho'_1 = \varrho_1 - \varrho_{n-1} + 1, \quad \varrho'_2 = \varrho_2 - \varrho_{n-1} + 1, \quad \dots, \quad \varrho'_{n-2} = \varrho_{n-2} - \varrho_{n-1} + 1. \end{cases}$$

Dann lässt sich zeigen, dass die Coefficienten $K'_1, \dots, K'_{m-1}$ mit $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{m-1}$, und die Coefficienten $L'_1, \dots, L'_{n-2}$ mit $\varrho'_1, \dots, \varrho'_{n-2}$ durch Gleichungen verbunden sind, welche mit den zwischen $K_1, \dots, K_m$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, resp. zwischen $L_1, \dots, L_{n-1}$ und $\varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}$ bestehenden Gleichungen (§ 1) identisch werden, falls man in letzteren m und n durch $m-1$ und $n-1$ ersetzt. In Folge dieses Umstandes lauten die $n-1$ Hauptintegrale der Differentialgleichung (53.) in Reihenform

$$F(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{m-1}; \varrho'_1, \varrho'_2, \dots, \varrho'_{n-2}; t),$$

$$t^{1-\varrho'_1} F\begin{pmatrix} \alpha'_1 - \varrho'_1 + 1, \ \alpha'_2 - \varrho'_1 + 1, \ \dots, \ \alpha'_{m-1} - \varrho'_1 + 1; \\ 2 - \varrho'_1, \ \varrho'_2 - \varrho'_1 + 1, \ \varrho'_3 - \varrho'_1 + 1, \ \dots, \ \varrho'_{n-2} - \varrho'_1 + 1; \ t \end{pmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$t^{1-\varrho'_{n-2}} F\begin{pmatrix} \alpha'_1 - \varrho'_{n-2} + 1, \ \alpha'_2 - \varrho'_{n-2} + 1, \ \dots, \ \alpha'_{m-1} - \varrho'_{n-2} + 1; \\ 2 - \varrho'_{n-2}, \ \varrho'_1 - \varrho'_{n-2} + 1, \ \varrho'_2 - \varrho'_{n-2} + 1, \ \dots, \ \varrho'_{n-3} - \varrho'_{n-2} + 1; \ t \end{pmatrix}.$$

Auf die Rechnungen in Bezug auf die Coefficienten $L'_1, \dots, L'_{n-2}$ braucht an dieser Stelle nicht eingegangen zu werden, da sie bereits durch § 3 meiner Abhandlung „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1}; x)$"*) erledigt sind. Für die Coefficienten $K'_{m-\mu-1}$ soll eine zu (15.) analoge Gleichung hergestellt werden.

Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_{m-1}$ die Constanten

$$(69.)\quad \mathfrak{a}_1 = \alpha_1 - \varrho_{n-1}, \quad \mathfrak{a}_2 = \alpha_2 - \varrho_{n-1}, \quad \dots, \quad \mathfrak{a}_{m-1} = \alpha_{m-1} - \varrho_{n-1},$$

und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_{m-1}$ die elementaren symmetrischen Functionen derselben, so dass für ein beliebiges ζ die Gleichung

$$(70.)\quad (\zeta + \mathfrak{a}_1)(\zeta + \mathfrak{a}_2) \dots (\zeta + \mathfrak{a}_{m-1}) = \zeta^{m-1} + \mathfrak{A}_1 \zeta^{m-2} + \dots + \mathfrak{A}_{m-2} \zeta + \mathfrak{A}_{m-1}$$

---

*) Dieses Journal Bd. 110 S. 188. Die obige Gleichung (63.) stimmt mit der Gleichung (24.) der genannten Abhandlung (wenn in letzterer $\nu-1$ statt k und Θ statt λ geschrieben wird) überein. Ebenso sind die in § 1 enthaltenen Gleichungen für die Coefficienten $L_{n-\mu}$ mit den dort angegebenen Gleichungen identisch.

gilt. Dann stellt die Summe

$$(71.)\quad d_\mu^{(\mu)}\mathfrak{A}_{m-\mu-1}+d_\mu^{(\mu+1)}\mathfrak{A}_{m-\mu-2}+d_\mu^{(\mu+2)}\mathfrak{A}_{m-\mu-3}+\cdots+d_\mu^{(m-2)}\mathfrak{A}_1+d_\mu^{(m-1)}$$

diejenige Grösse dar, welche aus der rechten Seite von (15.) entsteht, wenn die Zahl $m-1$ an die Stelle von m, und zugleich die Constanten α'_1, α'_2, ... an die Stelle von α_1, α_2, ... treten. Denn die Werthe $\mathfrak{a}_i$ entsprechen, da sie gleich α'_i-1 sind, den Werthen b_i, und die Coefficienten $\mathfrak{A}_i$ den Coefficienten B_i. Der behauptete Zusammenhang zwischen $K'_1, \dots, K'_{m-1}$ einerseits und $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{m-1}$ andererseits ist also erwiesen, wenn gezeigt wird, dass die in § 6 angegebenen Ausdrücke der Constanten $K'_{m-\mu-1}$ für $\mu=0$, $1, 2, \dots, m-2$ gleich der Summe (71.) sind.

Man bemerke, dass wenn nach (69.) der Werth $\mathfrak{a}_i+\varrho_{n-1}$ für α_i substituirt und $z+\varrho_{n-1}$ kurz ζ genannt wird, die Gleichung (54.), bei Berücksichtigung von (70.), die Form

$$(72.)\quad \begin{cases}(\zeta-\varrho_{n-1})^{m-1}+C_1(\zeta-\varrho_{n-1})^{m-2}+\cdots+C_{m-2}(\zeta-\varrho_{n-1})+C_{m-1}\\ \qquad = \zeta^{m-1}+\mathfrak{A}_1\zeta^{m-2}+\mathfrak{A}_2\zeta^{m-3}+\cdots+\mathfrak{A}_{m-2}\zeta+\mathfrak{A}_{m-1}\end{cases}$$

erhält. Hierin bezeichnet ζ eine beliebige Grösse. Indem man nach Anwendung des binomischen Satzes die Coefficienten von $\zeta^{\nu-1}$ auf der linken und der rechten Seite von (72.) einander gleich setzt, findet man

$$(73.)\qquad \mathfrak{A}_{m-\nu} = \sum_{l=\nu}^{l=m}(-1)^{l-\nu}(l-1)_{l-\nu}\varrho_{n-1}^{l-\nu}C_{m-l}$$

für $l=1, 2, \dots, m-1$; C_0 bedeutet, wie auch $\mathfrak{A}_0$, die Zahl 1.

Die Constante $J_{m-\nu}$ wurde in (55.) als die Summe

$$J_{m-\nu} = \sum_{l=\nu}^{l=m} d_{\nu-1}^{(l-1)}C_{m-l}$$

definirt. Wenn man diesen Werth in die Gleichung (62.), durch welche $K'_{m-\mu-1}$ in den Fällen $\mu=1, 2, \dots, m-2$ bestimmt wird, einsetzt und die Formel (30.) benutzt, so hat man

$$K'_{m-\mu-1} = \sum_{l=\mu+1}^{l=m} C_{m-l}\sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=l}(\nu-1)_{\nu-\mu-1}d_{\nu-1}^{(l-1)}[\Theta]_{\nu-\mu-1}.$$

Die Summe, welche in letzterem Ausdruck den Factor von C_{m-l} bildet,

$$d_\mu^{(l-1)}+(\mu+1)_1d_{\mu+1}^{(l-1)}[\Theta]_1+(\mu+2)_2d_{\mu+2}^{(l-1)}[\Theta]_2+\cdots+(l-1)_{l-\mu-1}d_{l-1}^{(l-1)}[\Theta]_{l-\mu-1},$$

kann nach (28.) auf die Form

$$d_\mu^{(l-1)}+(l-1)_1d_\mu^{(l-2)}\Theta+(l-1)_2d_\mu^{(l-3)}\Theta^2+\cdots+(l-1)_{l-\mu-1}d_\mu^{(\mu)}\Theta^{l-\mu-1}$$
$$= \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=l}(l-1)_{l-\nu}d_\mu^{(\nu-1)}\Theta^{l-\nu}$$

gebracht werden. Nach nochmaliger Anwendung von (30.) ergiebt sich also die Gleichung

$$K'_{m-\mu-1} = \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} d_\mu^{(\nu-1)} \sum_{l=\nu}^{l=m} (l-1)_{l-\nu}\, \Theta^{l-\nu} C_{m-l}$$

oder, wegen (73.) (da $\Theta = -\varrho_{n-1}$ ist),

$$K'_{m-\mu-1} = \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} d_\mu^{(\nu-1)} \mathfrak{A}_{m-\nu} = d_\mu^{(\mu)} \mathfrak{A}_{m-\mu-1} + d_\mu^{(\mu+1)} \mathfrak{A}_{m-\mu-2} + \cdots + d_\mu^{(m-2)} \mathfrak{A}_1 + d_\mu^{(m-1)}.$$

Dies ist aber die Summe (71.).

Im Falle $\mu = 0$ hat man die Gleichung (62.) durch (65.) zu ersetzen. Nach Substitution der Werthe (55.) für $J_{m-\nu}$ und Berücksichtigung von (30.) entsteht aus (65.) die Gleichung

$$K'_{m-1} = \sum_{l=1}^{l=m} C_{m-l} \sum_{\nu=1}^{\nu=l} d_{\nu-1}^{(l-1)} [\Theta]_{\nu-1}.$$

Aus (8.) folgt nun

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=l} d_{\nu-1}^{(l-1)} [\Theta]_{\nu-1} = d_0^{(l-1)} + d_1^{(l-1)} [\Theta]_1 + \cdots + d_{l-1}^{(l-1)} [\Theta]_{l-1} = (\Theta+1)^{l-1} = (1-\varrho_{n-1})^{l-1}.$$

Daher ergiebt sich

$$K'_{m-1} = \sum_{l=1}^{l=m} C_{m-l} (1-\varrho_{n-1})^{l-1} = (1-\varrho_{n-1})^{m-1} + C_1 (1-\varrho_{n-1})^{m-2} + \cdots + C_{m-1}$$

oder, wenn die Gleichung (72.) für $\zeta = 1$ benutzt wird,

$$K'_{m-1} = \mathfrak{A}_{m-1} + \mathfrak{A}_{m-2} + \cdots + \mathfrak{A}_1 + 1.$$

Letzterer Ausdruck stellt die Summe (71.) im Falle $\mu = 0$ dar.

Hiermit ist die in Rede stehende Beziehung zwischen den Coefficienten $K'_1, \ldots, L'_1, \ldots$ und den Parametern $\alpha'_1, \ldots, \varrho'_1, \ldots$ vollständig bewiesen*).

§ 8.

Die zweite Substitution, welche auf die Differentialgleichung (1.) angewendet werden soll, ist die in (18.) angegebene

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}} \mathfrak{T}\, dt.$$

---

*) Die Rechnungen in §§ 9—10 der oben erwähnten Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe etc.“ (dieses Journal, Bd. 102, S. 125—142) und die Rechnungen in § 3 der Abhandlung „Ueber eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte“ (dieses Journal, Bd. 108, S. 67—78) werden zweckmässigerweise durch die Entwickelungen der obigen §§ 3—7 ersetzt, da letztere einfacher sind. Für die Zahl m ist dann der Werth n, resp. $n-1$ zu nehmen.

Man nimmt hierbei, indem man den (in dem Aufsatze des 102. Bandes behandelten) Fall $m = n$ ausschliesst, $m < n$ an. Durch Einführung des genannten Integrals entsteht aus (1.) die Gleichung

$$\int_g^h e^{\frac{x}{t}} \left\{ \frac{x^{n-1}}{t^n} + \frac{L_1 x^{n-2}}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{L_{n-2} x}{t^2} + \frac{L_{n-1}}{t} \right\} \mathfrak{T} dt$$

$$= \int_g^h e^{\frac{x}{t}} \left\{ \frac{x^m}{t^m} + \frac{K_1 x^{m-1}}{t^{m-1}} + \cdots + \frac{K_{m-1} x}{t} + K_m \right\} \mathfrak{T} dt$$

oder, wenn

$$(74.) \qquad t' = \frac{1}{t}, \quad \mathfrak{T}' = -t^2 \mathfrak{T} = -\frac{\mathfrak{T}}{t'^2}, \quad g' = \frac{1}{g}, \quad h' = \frac{1}{h}$$

gesetzt wird,

$$\int_{g'}^{h'} e^{xt'} \{ x^{n-1} t'^n + L_1 x^{n-2} t'^{n-1} + \cdots + L_{n-2} x t'^2 + L_{n-1} t' \} \mathfrak{T}' dt'$$

$$= \int_{g'}^{h'} e^{xt'} \{ x^m t'^m + K_1 x^{m-1} t'^{m-1} + \cdots + K_{m-1} x t' + K_m \} \mathfrak{T}' dt'.$$

Die i-malige Anwendung der Formel der theilweisen Integration ergiebt aber*)

$$\int_{g'}^{h'} e^{xt'} x^i t'^i \mathfrak{T}' dt' = [P_i]_{t'=g'}^{t'=h'} + (-1)^i \int_{g'}^{h'} e^{xt'} \frac{d^i(t'^i \mathfrak{T}')}{dt'^i} dt',$$

$$\int_{g'}^{h'} e^{xt'} x^i t'^{i+1} \mathfrak{T}' dt' = [Q_i]_{t'=g'}^{t'=h'} + (-1)^i \int_{g'}^{h'} e^{xt'} \frac{d^i(t'^{i+1} \mathfrak{T}')}{dt'^i} dt',$$

woselbst P_i und Q_i die Summen

$$P_i = e^{xt'} \left\{ \begin{array}{l} x^{i-1} t'^i \mathfrak{T}' - x^{i-2} \frac{d(t'^i \mathfrak{T}')}{dt'} + x^{i-3} \frac{d^2(t'^i \mathfrak{T}')}{dt'^2} \\ - \cdots + (-1)^{i-2} x \frac{d^{i-2}(t'^i \mathfrak{T}')}{dt'^{i-2}} + (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}(t'^i \mathfrak{T}')}{dt'^{i-1}} \end{array} \right\},$$

$$Q_i = e^{xt'} \left\{ \begin{array}{l} x^{i-1} t'^{i+1} \mathfrak{T}' - x^{i-2} \frac{d(t'^{i+1} \mathfrak{T}')}{dt'} + x^{i-3} \frac{d^2(t'^{i+1} \mathfrak{T}')}{dt'^2} \\ - \cdots + (-1)^{i-2} x \frac{d^{i-2}(t'^{i+1} \mathfrak{T}')}{dt'^{i-2}} + (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}(t'^{i+1} \mathfrak{T}')}{dt'^{i-1}} \end{array} \right\}$$

bedeuten. Es sei $\mathfrak{M}$ der Ausdruck

$$(75.) \qquad \mathfrak{M} = \left\{ \begin{array}{l} Q_{n-1} + L_1 Q_{n-2} + L_2 Q_{n-3} + \cdots + L_{n-2} Q_1 \\ \qquad - (P_m + K_1 P_{m-1} + K_2 P_{m-2} + \cdots + K_{m-1} P_1). \end{array} \right.$$

---

*) Man vergleiche die analogen Rechnungen der in § 2 genannten Abhandlung „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$“, dieses Journal, Bd. 110, S. 188.

Dann folgt aus (1.)

$$[\mathfrak{M}]_{t'=g'}^{t'=h'}+\int_{g'}^{h'} e^{xt'}\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{i=n-1}(-1)^i L_{n-i-1}\frac{d^i(t'^{i+1}\mathfrak{T}')}{dt'^i}+L_{n-1}t'\mathfrak{T}' \\ -\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^i K_{m-i}\frac{d^i(t'^i\mathfrak{T}')}{dt'^i}-K_m\mathfrak{T}'\end{array}\right\}dt' = 0.$$

Wird also für die Function $\mathfrak{T}'$ die Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung

$$(76.)\quad \left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{i=n-1}(-1)^i L_{n-i-1}\frac{d^i(t'^{i+1}\mathfrak{T}')}{dt'^i}+L_{n-1}t'\mathfrak{T}' \\ = \sum_{i=1}^{i=m}(-1)^i K_{m-i}\frac{d^i(t'^i\mathfrak{T}')}{dt'^i}+K_m\mathfrak{T}'\end{array}\right.$$

und für die Grenzen g', h' die Bedingung

$$[\mathfrak{M}]_{t'=h'}-[\mathfrak{M}]_{t'=g'} = 0$$

aufgestellt, so ist das bestimmte Integral (18.) eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (1.).

Mit Hülfe der bekannten Formel

$$\frac{d^i\Phi}{dt'^i} = (-1)^i t^{i+1}\frac{d^i(t^{i-1}\Phi)}{dt^i},$$

in der t' den Werth $\frac{1}{t}$, und Φ eine beliebige Function bezeichnet, findet man (cfr. (74.)):

$$\frac{d^i(t'^{i+1}\mathfrak{T}')}{dt'^i} = (-1)^{i+1}t^{i+1}\frac{d^i\mathfrak{T}}{dt^i},$$

$$\frac{d^i(t'^i\mathfrak{T}')}{dt'^i} = (-1)^{i+1}t^{i+1}\frac{d^i(t\mathfrak{T})}{dt^i},$$

so dass die Gleichung (76.) (nach Division durch $-t$) die Gestalt

$$(77.)\quad \left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{i=n-1} L_{n-i-1}t^i\frac{d^i\mathfrak{T}}{dt^i}+L_{n-1}\mathfrak{T} \\ = \sum_{i=1}^{i=m} K_{m-i}t^i\frac{d^i(t\mathfrak{T})}{dt^i}+K_m t\mathfrak{T}\end{array}\right.$$

annimmt. Ferner wird

$$P_i = -e^{\frac{x}{t}}\left\{x^{i-1}t^{2-i}\mathfrak{T}+\sum_{\nu=1}^{\nu=i-1}x^{i-\nu-1}t^{\nu+1}\frac{d^\nu(t^{\nu-i+1}\mathfrak{T})}{dt^\nu}\right\},$$

$$Q_i = -e^{\frac{x}{t}}\left\{x^{i-1}t^{1-i}\mathfrak{T}+\sum_{\nu=1}^{\nu=i-1}x^{i-\nu-1}t^{\nu+1}\frac{d^\nu(t^{\nu-i}\mathfrak{T})}{dt^\nu}\right\}.$$

Nachdem in dieser Weise die Variable t wieder eingeführt worden ist, lautet die Bedingung für die Integralgrenzen

$$(78.)\quad [\mathfrak{M}]_{t=h}-[\mathfrak{M}]_{t=g} = 0.$$

Man transformirt die Gleichung (77.) durch die Substitution

$$\mathfrak{T} = t^\lambda T, \tag{79.}$$

in der λ eine Constante bedeutet. Dann gilt für T die Gleichung

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{i=n-1} L_{n-i-1} t^i \dfrac{d^i(t^\lambda T)}{dt^i} + L_{n-1} t^\lambda T \\ = \sum\limits_{i=1}^{i=m} K_{m-i} t^i \dfrac{d^i(t^{\lambda+1} T)}{dt^i} + K_m t^{\lambda+1} T. \end{cases} \tag{80.}$$

Aus der Formel (46.) geht hervor, dass der Factor von $\frac{d^\mu T}{dt^\mu}$ auf der linken Seite von (80.) für $\mu = 1, 2, \dots, n-1$ durch den Ausdruck

$$t^{\lambda+\mu} \sum_{i=\mu}^{i=n-1} (i)_{i-\mu} [\lambda]_{i-\mu} L_{n-i-1}$$

und auf der rechten Seite für $\mu = 1, 2, \dots, m$ durch den Ausdruck

$$t^{\lambda+\mu+1} \sum_{i=\mu}^{i=m} (i)_{i-\mu} [\lambda+1]_{i-\mu} K_{m-i}$$

angegeben wird, während der Factor von T gleich

$$t^\lambda \sum_{i=0}^{i=n-1} [\lambda]_i L_{n-i-1}, \quad \text{resp.} \quad t^{\lambda+1} \sum_{i=0}^{i=m} [\lambda+1]_i K_{m-i}$$

ist. Setzt man also zur Abkürzung

$$\mathfrak{K}'_{m-\mu} = \sum_{i=\mu}^{i=m} (i)_{i-\mu} [\lambda+1]_{i-\mu} K_{m-i}, \qquad \text{(für } \mu = 1, 2, \dots, m) \tag{81.}$$

$$\mathfrak{L}'_{n-\mu-1} = \sum_{i=\mu}^{i=n-1} (i)_{i-\mu} [\lambda]_{i-\mu} L_{n-i-1} \qquad \text{(für } \mu = 1, 2, \dots, n-1) \tag{82.}$$

und

$$\mathfrak{K}'_m = \sum_{i=0}^{i=m} [\lambda+1]_i K_{m-i}, \tag{83.}$$

$$\mathfrak{L}'_{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} [\lambda]_i L_{n-i-1}, \tag{84.}$$

so erhält man aus (80.), nach Division durch $t^{\lambda+1}$, die Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} \mathfrak{L}'_{n-\mu-1} t^{\mu-1} \frac{d^\mu T}{dt^\mu} + \frac{\mathfrak{L}'_{n-1}}{t} T = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \mathfrak{K}'_{m-\mu} t^\mu \frac{d^\mu T}{dt^\mu} + \mathfrak{K}'_m T.$$

Die Coefficienten $\mathfrak{K}'_0$, $\mathfrak{L}'_0$ sind nach (81.), (82.) gleich Eins. Man bestimmt die Constante λ durch die Gleichung

$$\mathfrak{L}'_{n-1} = 0. \tag{85.}$$

Dann besteht für T die Differentialgleichung

$$(86.)\quad \begin{cases} t^{n-2}\frac{d^{n-1}T}{dt^{n-1}}+\mathfrak{L}'_1 t^{n-3}\frac{d^{n-2}T}{dt^{n-2}}+\mathfrak{L}'_2 t^{n-4}\frac{d^{n-3}T}{dt^{n-3}}+\cdots \\ \cdots+\mathfrak{L}'_{n-\mu-1}t^{\mu-1}\frac{d^\mu T}{dt^\mu}+\cdots+\mathfrak{L}'_{n-3}t\frac{d^2T}{dt^2}+\mathfrak{L}'_{n-2}\frac{dT}{dt} \\ = t^m\frac{d^mT}{dt^m}+\mathfrak{K}'_1 t^{m-1}\frac{d^{m-1}T}{dt^{m-1}}+\mathfrak{K}'_2 t^{m-2}\frac{d^{m-2}T}{dt^{m-2}}+\cdots \\ \cdots+\mathfrak{K}'_{m-\mu}t^\mu\frac{d^\mu T}{dt^\mu}+\cdots+\mathfrak{K}'_{m-1}t\frac{dT}{dt}+\mathfrak{K}'_m T, \end{cases}$$

die sich von der Gleichung (1.) nur dadurch unterscheidet, dass die Grössen $n-1$, t, T, $\mathfrak{K}'_1$, $\mathfrak{L}'_1$, ... an die Stelle von n, x, y, K_1, L_1, ... getreten sind.

Durch L'_{n-1} wird nach (84.) die Summe

$$[\lambda]_{n-1}+L_1[\lambda]_{n-2}+L_2[\lambda]_{n-3}+\cdots+L_{n-2}[\lambda]_1+L_{n-1}$$

bezeichnet, für die man, gemäss (4.) und (6.) das Product

$$(\lambda+\varrho_1)(\lambda+\varrho_2)\dots(\lambda+\varrho_{n-1})$$

setzen kann. Der Bedingung (85.) ist also genügt, wenn

$$(87.)\quad \lambda = -\varrho_{n-1}$$

genommen wird. Für y ergiebt sich dann der Ausdruck

$$(88.)\quad y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}}t^{-\varrho_{n-1}}T\,dt.$$

§ 9.

Da sowohl für λ als auch für Θ der Werth $-\varrho_{n-1}$ gewählt wurde (cfr. (66.)), so sind, wie aus den Gleichungen (63.) und (82.) hervorgeht, die Constanten $\mathfrak{L}'_{n-\mu-1}$ mit den Constanten $L'_{n-\mu-1}$ identisch. Denn bei Einführung des Summationsindex $\nu=i+1$ lautet die Gleichung (82.)

$$L'_{n-\mu-1} = \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=n}(\nu-1)_{\nu-\mu-1}[\lambda]_{\nu-\mu-1}L_{n-\nu}.$$

Nennt man also (analog zur Bezeichnung in § 7) α'_1, ϱ'_1, ... die Constanten

$$(89.)\quad \begin{cases} \alpha'_1=\alpha_1-\varrho_{n-1}+1, & \alpha'_2=\alpha_2-\varrho_{n-1}+1, & \dots, & \alpha'_m=\alpha_m-\varrho_{n-1}+1, \\ \varrho'_1=\varrho_1-\varrho_{n-1}+1, & \varrho'_2=\varrho_2-\varrho_{n-1}+1, & \dots, & \varrho'_{n-2}=\varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}+1, \end{cases}$$

so gelten zwischen den Grössen $\mathfrak{L}'_1$, $\mathfrak{L}'_2$, ..., ϱ'_1, ϱ'_2, ... dieselben Gleichungen wie zwischen den Grössen L_1, L_2, ..., ϱ_1, ϱ_2, ... (§ 1), mit der Modification, dass hier $n-1$ statt n zu schreiben ist.

Ferner sind die Grössen $\mathfrak{K}'_1$, ..., $\mathfrak{K}'_m$, α'_1, ..., α'_m mit einander durch

ein Gleichungssystem von genau derselben Art verbunden wie die Grössen $K_1, \ldots, K_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Man definirt m Constanten $A'_1, \ldots, A'_m$ durch die Gleichung

$$(90.)\quad \zeta^m + A'_1\zeta^{m-1} + A'_2\zeta^{m-2} + \cdots + A'_{m-1}\zeta + A'_m = (\zeta+\alpha'_1)(\zeta+\alpha'_2)\ldots(\zeta+\alpha'_m),$$

in der ζ einen beliebigen Werth bedeutet, und setzt $A'_0 = 1$. Nach (10.) wird der Coefficient $K_{m-\mu}$ im Falle $\mu > 0$ durch die Summe

$$\sum_{i=\mu}^{i=m} d_{\mu-1}^{(i-1)} A_{m-i}$$

dargestellt, während $K_m = A_m$ ist (cfr. (9.)). Es soll nun gezeigt werden, dass für $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$ der Coefficient $\mathfrak{K}'_{m-\mu}$ in den entsprechenden Ausdruck

$$(91.)\qquad \sum_{i=\mu}^{i=m} d_{\mu-1}^{(i-1)} A'_{m-i}$$

umgeformt werden kann, und dass $\mathfrak{K}'_m$ sich auf den Werth A'_m reducirt.

Man leitet, um dies zu beweisen, zunächst eine Hülfsgleichung ab. In (5.) werde

$$z = \zeta + 1 - \varrho_{n-1}$$

substituirt, wodurch, bei Berücksichtigung von (89.) und (90.), die Identität

$$(92.)\quad \begin{cases} (\zeta+1-\varrho_{n-1})^m + A_1(\zeta+1-\varrho_{n-1})^{m-1} + \cdots + A_{m-1}(\zeta+1-\varrho_{n-1}) + A_m \\ \qquad = \zeta^m + A'_1\zeta^{m-1} + A'_2\zeta^{m-2} + \cdots + A'_{m-1}\zeta + A'_m \end{cases}$$

erhalten wird. Nachdem die Potenzen von $\zeta+1-\varrho_{n-1}$ nach dem binomischen Satze entwickelt sind, werden die Coefficienten von ζ^i auf der linken und der rechten Seite von (92.) mit einander verglichen. Dann ergiebt sich

$$(93.)\qquad A'_{m-i} = \sum_{\nu=i}^{\nu=m} (\nu)_{\nu-i}(1-\varrho_{n-1})^{\nu-i} A_{m-\nu}$$

für $i = 1, 2, \ldots, m$. Ferner ist, wie aus (92.) für $\zeta = 0$ folgt,

$$(94.)\qquad A'_m = \sum_{\nu=0}^{\nu=m} (1-\varrho_{n-1})^{\nu} A_{m-\nu}.$$

Wird in (81.) an Stelle von K_{m-i} die in (10.) bezeichnete Summe eingesetzt und die Formel (30.) angewendet, so entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{K}'_{m-\mu} = \sum_{\nu=\mu}^{\nu=m} A_{m-\nu} \sum_{i=\mu}^{i=\nu} (i)_{i-\mu} d_{i-1}^{(\nu-1)} [\lambda+1]_{i-\mu}.$$

Der Factor von $A_{m-\nu}$ in letzterer Doppelsumme,

$$d_{\mu-1}^{(\nu-1)} + (\mu+1)_1 d_{\mu}^{(\nu-1)}[\lambda+1]_1 + (\mu+2)_2 d_{\mu+1}^{(\nu-1)}[\lambda+1]_2 + \cdots + (\nu)_{\nu-\mu} d_{\nu-1}^{(\nu-1)}[\lambda+1]_{\nu-\mu},$$

hat nach der Formel (29.) (in der $k = \mu-1$, $p = \nu-1$, $z = \lambda+1$ genommen wird) den Werth

$$d_{\mu-1}^{(\nu-1)}+(\nu)_1 d_{\mu-1}^{(\nu-2)}(\lambda+1)+(\nu)_2 d_{\mu-1}^{(\nu-3)}(\lambda+1)^2+\cdots+(\nu)_{\nu-\mu} d_{\mu-1}^{(\mu-1)}(\lambda+1)^{\nu-\mu},$$

d. h. den Werth

$$\sum_{i=\mu}^{i=\nu} (\nu)_{\nu-i} d_{\mu-1}^{(i-1)}(1-\varrho_{n-1})^{\nu-i},$$

da $\lambda = -\varrho_{n-1}$ ist. Man findet demnach, wenn man die Formel (30.) abermals benutzt,

$$\mathfrak{K}'_{m-\mu} = \sum_{i=\mu}^{i=m} d_{\mu-1}^{(i-1)} \sum_{\nu=i}^{\nu=m} (\nu)_{\nu-i}(1-\varrho_{n-1})^{\nu-i} A_{m-\nu}.$$

Hieraus folgt aber, mit Rücksicht auf (93.), die Gleichung

$$(95.)\qquad \mathfrak{K}'_{m-\mu} = \sum_{i=\mu}^{i=m} d_{\mu-1}^{(i-1)} A'_{m-i}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m-1)$$

deren rechte Seite gleich dem Ausdruck (91.) ist.

Einer analogen Umformung wird die Gleichung (83.)

$$\mathfrak{K}'_m = K_m + \sum_{i=1}^{i=m} [\lambda+1]_i K_{m-i}$$

unterzogen. Nach Substitution der Werthe K_{m-i} aus (9.) und (10.) und Anwendung der Gleichung (30.) ergiebt sich

$$\mathfrak{K}'_m = A_m + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} A_{m-\nu} \sum_{i=1}^{i=\nu} d_{i-1}^{(\nu-1)}[\lambda+1]_i$$

oder, da $[\lambda+1]_i$ als das Product $(\lambda+1)[\lambda]_{i-1}$ geschrieben werden kann,

$$\mathfrak{K}'_m = A_m + (\lambda+1) \sum_{\nu=1}^{\nu=m} A_{m-\nu} \sum_{i=1}^{i=\nu} d_{i-1}^{(\nu-1)}[\lambda]_{i-1}.$$

Nun ist nach (8.)

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} d_{i-1}^{(\nu-1)}[\lambda]_{i-1} = d_0^{(\nu-1)} + d_1^{(\nu-1)}[\lambda]_1 + \cdots + d_{\nu-1}^{(\nu-1)}[\lambda]_{\nu-1} = (\lambda+1)^{\nu-1},$$

also

$$\mathfrak{K}'_m = A_m + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} A_{m-\nu}(\lambda+1)^\nu.$$

Indem man für die Constante λ ihren Werth $-\varrho_{n-1}$ einsetzt und die Gleichung (94.) beachtet, findet man

$$(96.)\qquad \mathfrak{K}'_m = A'_m.$$

Aus obiger Rechnung folgt, dass die Differentialgleichung (86.) durch die $n-1$ Reihen

$$F(\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \dots,\ \alpha'_m;\ \varrho'_1,\ \varrho'_2,\ \dots,\ \varrho'_{n-2};\ t),$$

$$t^{1-\varrho'_1}F\begin{pmatrix}\alpha'_1-\varrho'_1+1,\ \alpha'_2-\varrho'_1+1,\ \dots,\ \alpha'_m-\varrho'_1+1; & \\ 2-\varrho'_1,\ \varrho'_2-\varrho'_1+1,\ \varrho'_3-\varrho'_1+1,\ \dots,\ \varrho'_{n-2}-\varrho'_1+1; & t\end{pmatrix},$$

. . . .

$$t^{1-\varrho'_{n-2}}F\begin{pmatrix}\alpha'_1-\varrho'_{n-2}+1,\ \alpha'_2-\varrho'_{n-2}+1,\ \dots,\ \alpha'_m-\varrho'_{n-2}+1; & \\ 2-\varrho'_{n-2},\ \varrho'_1-\varrho'_{n-2}+1,\ \varrho'_2-\varrho'_{n-2}+1,\ \dots,\ \varrho'_{n-3}-\varrho'_{n-2}+1; & t\end{pmatrix}$$

befriedigt wird.

Note zu der Abhandlung über ternäre Formen im 98. Bande dieses Journals.

(Von Herrn *A. Meyer* in Zürich.)

Die Regel, welche ich auf Seite 229 dieser Abhandlung für die Berechnung der Klassenanzahl derjenigen ternären quadratischen Formen gegeben habe, durch welche die Null rational darstellbar ist und die ich daselbst Nullformen genannt habe, bedarf einer Verbesserung und lässt sich zudem vereinfachen. Sie kann nämlich mit Aenderung der Bezeichnungsweise*) folgendermassen formulirt werden:

Um die Klassenanzahl eines gegebenen Geschlechtes von indefiniten ternären quadratischen Formen f der ungeraden Invarianten Ω, Δ zu bestimmen, stelle man Ω und Δ als Producte von Potenzen verschiedener Primzahlen dar, reducire in jeder Potenz den Exponenten auf 2 oder 1, je nachdem er gerade oder ungerade ist, und erhalte so aus Ω und Δ bezw. Ω_1 und Δ_1. Es sei Θ der grösste gemeinschaftliche Theiler von Ω_1 und Δ_1, und Θ_2^2, Ω_2^2, Δ_2^2 seien die grössten in Θ, Ω_1, Δ_1 aufgehenden Quadrate,

---

*) Zur bequemeren Vergleichung stelle ich die jetzige und frühere Bezeichnung neben einander:

jetzt:	früher:
Ω_1	$\Omega_1 (= P^2R^2\Theta'\Omega'^2\Delta'\Omega'')$
Δ_1	$\Delta_1 (= P^2Q^2\Theta'\Delta'^2\Omega'\Delta'')$
Θ	$P^2\Theta'\Omega'\Delta'$
Θ_2	P
Ω_2	$PR\Omega'$
Δ_2	$PQ\Delta'$
Θ'	$\Theta'\Omega'\Delta'$
Ω'	$\Theta'\Delta'\Omega''$
Δ'	$\Theta'\Omega'\Delta''$
M	$\Theta'\Omega'\Delta'\Omega''\Delta''$
d	r

$\Theta = \Theta_2^2\Theta'$, $\Omega_1 = \Omega_2^2\Omega'$, $\Delta_1 = \Delta_2^2\Delta'$, M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von Ω' und Δ'.

Ferner seien θ_1, θ_2, $\dots$, θ_m diejenigen verschiedenen Primfactoren (> 3) von Θ, für welche

$$(\theta.) \qquad \left(\frac{-\Delta_k'f}{\theta_k}\right) = \left(\frac{-\Omega_k'F}{\theta_k}\right) = +1$$

ist, wo F die primitive Adjungirte von f bedeutet, $\Delta_k' = \frac{\Delta'}{\theta_k}$ oder $= \Delta'$ ist, je nachdem θ_k in Δ' aufgeht oder nicht, und Ω_k' ebenso aus Ω' entsteht;

d sei ein positiver oder negativer Theiler von $2M$, d' ein solcher Theiler d, für welchen

$$\left(\frac{d_k}{\theta_k}\right) = +1 \qquad (k = 1, 2, \dots, m)$$

ist, wo $d_k = \frac{d}{\theta_k}$ oder $= d$ ist, je nachdem θ_k in d aufgeht oder nicht; endlich sei 2^n die Anzahl aller Theiler d, $2^{n'}$ diejenige aller Theiler d'.

Dann ist die Klassenanzahl des betrachteten Geschlechtes gleich $2^{m+n'-n}$.

Bemerkung. Ist f, also auch F, eine Nullform, so ist

$$\left(\frac{\Delta'f}{\omega}\right) = +1, \quad \left(\frac{\Omega'F}{\delta}\right) = +1, \quad \left(\frac{\Delta_k'f}{\theta_k}\right)\left(\frac{\Omega_k'F}{\theta_k}\right) = \left(\frac{-1}{\theta_k}\right)$$

für die Primfactoren $\omega(\delta)$ von $\Omega'(\Delta')$, die nicht in $\Delta'(\Omega')$ aufgehen und für die gemeinschaftlichen Primfactoren θ_k von Ω' und Δ'. Daher ist die Bedingung $(\theta.)$ für die Primfactoren der Form $4n+3$ von $\Omega'\Delta'$ nicht erfüllt. Dagegen können ihr auch für Nullformen solche Primfactoren θ_k der Form $4n+3$ genügen, welche in Θ_2 aufgehen. Daher hätten die a. a. O. mit p_k bezeichneten Primzahlen nicht auf die Form $4n+1$ und die Theiler r nicht auf positive Werthe beschränkt werden sollen. Diese Einschränkung rührt von einem Versehen her, das in der Gleichung S. 216, Zeile 15 v. o. vorkommt, wo nicht der zweite Factor links, sondern sein Entgegengesetztes einen der vier Werthe des Ausdruckes $aa_0'z \pm (\Omega_0 A'' + b_1 b_2 z)$ darstellt und daher der aus jener Gleichung gezogene Schluss hinfällig wird. Im Uebrigen lässt sich die Uebereinstimmung der hier gegebenen Regel mit der frühern leicht nachweisen.

In obiger Form gilt nun die Regel sehr wahrscheinlich nicht nur für Nullformen, sondern auch für beliebige indefinite Formen ungerader Determinante. Ich behalte mir vor, hierauf in einer ausführlicheren Mittheilung zurückzukommen.

Anwendung der Transformation zweiten Grades der Thetafunctionen zweier Variabeln auf das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen.

(Von Herrn *G. Hettner.*)

In ähnlicher Weise, wie die Bestimmung des arithmetisch-geometrischen Mittels aus zwei positiven Elementen durch die reelle Periode eines elliptischen Integrales erster Gattung mit Hülfe der Transformation zweiten Grades der elliptischen Thetafunctionen abgeleitet werden kann, lässt sich mittelst der Transformation zweiten Grades der Thetafunctionen zweier Veränderlichen die Darstellung des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier positiven Elementen durch eine aus den reellen Perioden gewisser hyperelliptischer Integrale erster Gattung gebildete Determinante herleiten. Ein solcher auf Transformation der Thetafunctionen beruhender Beweis für diese Darstellung, dessen Möglichkeit *Borchardt* schon in seiner ersten Veröffentlichung*) über das Mittel aus vier Elementen angedeutet hat, soll im Folgenden ausgeführt werden; der von *Borchardt* selbst mitgetheilte ausführliche Beweis**) beruht auf der algebraischen Transformation eines Doppelintegrales, der später von mir gegebene***) auf der algebraischen Transformation der hyperelliptischen Integrale.

Die vier positiven Grössen a, b, c, e, deren arithmetisch-geometrisches Mittel bestimmt werden soll, genügen nach der Annahme *Borchardts* der Ungleichung $ae-bc > 0$. In dem Grenzfalle $ae-bc = 0$, der im letzten Paragraphen dieser Arbeit untersucht wird, gehen die hyperelliptischen

---

*) Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, November 1876 S. 611; *Borchardts* Gesammelte Werke S. 327.

**) Mathematische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, a. d. J. 1878 S. 33; *Borchardts* Gesammelte Werke S. 373.

***) Dieses Journal, Bd. 89 S. 221.

Integrale erster Gattung in elliptische Integrale erster und dritter Gattung über. Der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen reducirt sich dann auf einen aus drei Elementen gebildeten Algorithmus, den zuerst von einem anderen Ausgangspunkt ausgehend *K. Schering* untersucht hat*); der gemeinsame Grenzwerth der durch fortgesetzte Anwendung dieses speciellen Algorithmus gebildeten Elemente lässt sich als das Product zweier arithmetisch-geometrischen Mittel je zweier Elemente darstellen.

1.

Bedeuten α_0, α_1, α_2, α_3 vier unter einander verschiedene reelle positive Grössen, die der Ungleichung

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$$

gemäss geordnet sind, so sollen zunächst die Verhältnisse dieser vier Grössen durch die Nullwerthe der dem hyperelliptischen Gebilde

$$\xi^2 = R(x) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)x$$

zugehörigen Thetafunctionen zweier Variabeln ausgedrückt werden.

Es mögen a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} vier reelle Grössen darstellen, deren Determinante $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \gtrless 0$ ist, und es werde

$$(1.)\quad \begin{cases} \omega_{\lambda 1} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx, & \omega_{\lambda 2} = \int_{\alpha_3}^{0} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx, \\ \omega'_{\lambda 1} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx, & \omega'_{\lambda 2} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx \end{cases}$$
$$(\lambda = 1, 2)$$

gesetzt, so bilden $2\omega_{\lambda 1}$, $2\omega_{\lambda 2}$, $2\omega'_{\lambda 1}$, $2\omega'_{\lambda 2}$ ein System primitiver Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung $\int \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx$ $(\lambda = 1, 2)$. Dabei ist hier und im Folgenden der unter dem Integralzeichen stehenden Wurzelgrösse $\sqrt{R(x)}$ im Intervall $(+\infty\cdots\alpha_0)$ der Werth $+\sqrt{+R(x)}$, im Intervall $(\alpha_0\ldots\alpha_1)$ der Werth $+i\sqrt{-R(x)}$, im Intervall $(\alpha_1\ldots\alpha_2)$ der Werth $-\sqrt{+R(x)}$, im Intervall $(\alpha_2\ldots\alpha_3)$ der Werth $-i\sqrt{-R(x)}$, im Intervall $(\alpha_3\ldots 0)$ der Werth $+\sqrt{+R(x)}$, und im Intervall $(0\cdots-\infty)$ der Werth $+i\sqrt{-R(x)}$ beizulegen, wenn für die Quadratwurzel aus der positiven Grösse $\pm R(x)$ der positive Werth genommen wird.

*) Dieses Journal, Bd. 85 S. 115.

Aus den beiden Gleichungen zwischen den Variabeln x_1, x_2 und v_1, v_2

$$(2.)\qquad \int_{a_1}^{x_1} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx + \int_{a_3}^{x_2} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx = 2\omega_{\lambda 1}v_1+2\omega_{\lambda 2}v_2 \qquad (\lambda=1,2)$$

ergeben sich nun durch Lösung des Umkehrproblems die *Abel*schen Functionen

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(-1)^{\mu}(\alpha_{2\mu}-x_1)(\alpha_{2\mu}-x_2)}}{\sqrt[4]{R'(\alpha_{2\mu})}} = \dfrac{\vartheta_{2\mu}(v_1,\,v_2)}{\vartheta_5(v_1,\,v_2)} & (\mu=0,1,2), \\[2ex] \dfrac{\sqrt{(-1)^{\mu-1}(\alpha_{2\mu-1}-x_1)(\alpha_{2\mu-1}-x_2)}}{\sqrt[4]{-R'(\alpha_{2\mu-1})}} = \dfrac{\vartheta_{2\mu-1}(v_1,\,v_2)}{\vartheta_5(v_1,\,v_2)} & (\mu=1,2); \end{cases}$$

$$(4.)\qquad \frac{\sqrt{\alpha_\mu-\alpha_\nu}}{x_1-x_2}\left\{\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-\alpha_\mu)(x_1-\alpha_\nu)}-\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-\alpha_\mu)(x_2-\alpha_\nu)}\right\} = \frac{\vartheta_5(v_1,\,v_2)\vartheta_{\mu\nu}(v_1,\,v_2)}{\vartheta_\mu(v_1,\,v_2)\vartheta_\nu(v_1,\,v_2)}$$

$$(\mu,\nu=0,1,2,3,4;\ \mu<\nu),$$

worin $\alpha_4=0$ zu setzen ist, und wobei die Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} der ϑ-Functionen durch die Gleichungen

$$\tau_{11} = \frac{\omega_{22}\omega'_{11}-\omega_{12}\omega'_{21}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}},\quad \tau_{22} = \frac{\omega_{11}\omega'_{22}-\omega_{21}\omega'_{12}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}},$$

$$\tau_{12}=\tau_{21} = \frac{\omega_{22}\omega'_{12}-\omega_{12}\omega'_{22}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}} = \frac{\omega_{11}\omega'_{21}-\omega_{21}\omega'_{11}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}$$

aus den Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung zu bestimmen sind. In dem hier betrachteten Falle sind die Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} rein imaginär, und es lässt sich leicht direct zeigen, dass die Bedingungen für die Convergenz der ϑ-Functionen erfüllt sind.

Die Nullwerthe der sechzehn Functionen $\vartheta_\lambda(v_1, v_2)$ und $\vartheta_{\mu\nu}(v_1, v_2)$, d. h. die Werthe, welche die ϑ-Functionen annehmen, wenn beide Argumente v_1 und v_2 verschwinden, mögen resp. mit c_λ und $c_{\mu\nu}$ bezeichnet werden. Sind die Moduln, wie hier, rein imaginär, so sind die Nullwerthe der ϑ-Functionen reell, wie unmittelbar aus ihren Reihenentwickelungen hervorgeht. Aus diesen ergiebt sich ferner, dass c_5, c_{23}, c_4, c_{01} stets positiv sind, und dass stets

$$c_{23}^2 > c_{14}^2,\quad c_4^2 > c_{03}^2,\quad c_{01}^2 > c_2^2$$

ist. Die Grössen c_1, c_3, c_{02}, c_{04}, c_{13}, c_{24} sind Null, da die ϑ-Functionen mit den entsprechenden Indices ungerade sind.

Um nun die Verhältnisse der Grössen α_0, α_1, α_2, α_3 durch die Nullwerthe c_λ und $c_{\mu\nu}$ darzustellen, setze man zunächst in den beiden Gleichungen, welche aus der ersten Gleichung des Systems (3.) für $\mu=0$ und $\mu=1$

hervorgehen, $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_3$, also $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, so ergiebt sich

$$\sqrt{\frac{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_3)}{\alpha_0(\alpha_0-\alpha_2)}} = \frac{c_0^2}{c_5^2}, \quad \sqrt{\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)}{\alpha_2(\alpha_0-\alpha_2)}} = \frac{c_2^2}{c_5^2}.$$

Führt man sodann dieselben speciellen Werthe von x_1 und x_2 in die Ausdrücke der beiden Producte

$$\frac{\vartheta_5(r_1, v_2)\vartheta_{12}(v_1, v_2)}{\vartheta_1(v_1, v_2)\vartheta_2(v_1, v_2)} \cdot \frac{\vartheta_1(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} \cdot \frac{\vartheta_2(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$$

und

$$\frac{\vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)}{\vartheta_3(v_1, v_2)\vartheta_4(v_1, v_2)} \cdot \frac{\vartheta_3(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} \cdot \frac{\vartheta_4(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)},$$

die sich aus (3.) und (4.) ergeben, ein, so folgt

$$\sqrt{\frac{\alpha_1(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}{\alpha_2(\alpha_0-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}} = \frac{c_{12}^2}{c_5^2}, \quad \sqrt{\frac{\alpha_1(\alpha_0-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}{\alpha_0\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)}} = \frac{c_{34}^2}{c_5^2}.$$

Die Quadratwurzeln aus den positiven Grössen auf den linken Seiten dieser Gleichungen sind positiv zu nehmen. Löst man diese Gleichungen nach den Verhältnissen der vier Grössen α_0, α_1, α_2, α_3 auf, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die von *Göpel* und von *Rosenhain* aufgestellten Relationen, welche zwischen den Quadraten der Nullwerthe der ϑ-Functionen bestehen und aussagen, dass die neun Quotienten

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{c_4^2}{c_5^2}, & \dfrac{c_0^2}{c_5^2}, & -\dfrac{c_2^2}{c_5^2}, \\[2ex] -\dfrac{c_{14}^2}{c_5^2}, & \dfrac{c_{01}^2}{c_5^2}, & \dfrac{c_{12}^2}{c_5^2}, \\[2ex] \dfrac{c_{34}^2}{c_5^2}, & -\dfrac{c_{03}^2}{c_5^2}, & \dfrac{c_{23}^2}{c_5^2} \end{array}$$

die Coefficienten einer orthogonalen Substitution mit der Determinante $+1$ bilden,

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_0} = \frac{c_4^2 c_{03}^2}{c_5^2 c_{12}^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{c_{03}^2 c_{23}^2}{c_{12}^2 c_{01}^2}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{c_{23}^2 c_4^2}{c_{01}^2 c_5^2}.$$

Demnach kann ein positiver Factor ε so bestimmt werden, dass die Gleichungen

$$(5.) \quad \alpha_0 = \varepsilon c_{23}^2 c_5^2 c_{12}^2, \quad \alpha_1 = \varepsilon c_{12}^2 c_4^2 c_{01}^2, \quad \alpha_2 = \varepsilon c_{01}^2 c_5^2 c_{03}^2, \quad \alpha_3 = \varepsilon c_{03}^2 c_4^2 c_{23}^2$$

gleichzeitig bestehen.

Mit Hülfe der Relationen unter den Quadraten der Nullwerthe der ϑ-Functionen folgt unmittelbar, dass die eben gefundenen Ausdrücke für α_0, α_1, α_2, α_3 in der That die zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellte

Ungleichung $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ erfüllen; und diese Ungleichung, angewandt auf die obigen Ausdrücke für $\frac{c_0^2}{c_5^2}$, $\frac{c_{12}^2}{c_5^2}$ und $\frac{c_{34}^2}{c_5^2}$, zeigt, dass stets

$$c_5^2 > c_0^2,\quad c_5^2 > c_{12}^2,\quad c_5^2 > c_{34}^2$$

ist. Ferner ergeben sich aus jenen *Göpel-Rosenhain*schen Relationen die Ungleichungen

$$c_5^2 c_0^2 - c_{12}^2 c_{34}^2 > 0,\quad c_5^2 c_{12}^2 - c_0^2 c_{34}^2 > 0,\quad c_5^2 c_{34}^2 - c_0^2 c_{12}^2 > 0,$$

die im Folgenden gebraucht werden.

2.

Die Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen zweier Variabeln, durch welche der Uebergang zu den Thetafunctionen mit den doppelten Moduln vermittelt wird, ist von *Königsberger**) behandelt worden. Werden hier, ebenso wie bei *Königsberger*, die transformirten Thetafunctionen

$$\vartheta_\lambda(2v_1, 2v_2; 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}),\quad \vartheta_{\mu\nu}(2v_1, 2v_2; 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22})$$

zur Abkürzung resp. mit

$$\Theta_\lambda(2v_1, 2v_2),\quad \Theta_{\mu\nu}(2v_1, 2v_2)$$

bezeichnet und ihre Nullwerthe resp. gleich C_λ und $C_{\mu\nu}$ gesetzt, so bestehen zwischen den transformirten und den ursprünglichen Thetafunctionen die folgenden drei Systeme von Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} 4C_5\,\Theta_5\,(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5^2(v_1, v_2)+\vartheta_0^2(v_1, v_2)+\vartheta_{12}^2(v_1, v_2)+\vartheta_{34}^2(v_1, v_2), \\ 2C_0\,\Theta_0\,(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_0\,(v_1, v_2)+\vartheta_{12}(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2), \\ 2C_{12}\Theta_{12}(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{12}(v_1, v_2)+\vartheta_{34}(v_1, v_2)\vartheta_0(v_1, v_2), \\ 2C_{34}\Theta_{34}(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)+\vartheta_0(v_1, v_2)\vartheta_{12}(v_1, v_2); \end{cases}$$

$$(7.)\quad \begin{cases} 4C_{23}\Theta_{23}(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5^2(v_1, v_2)+\vartheta_0^2(v_1, v_2)-\vartheta_{12}^2(v_1, v_2)-\vartheta_{34}^2(v_1, v_2), \\ 4C_4\,\Theta_4\,(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5^2(v_1, v_2)-\vartheta_0^2(v_1, v_2)+\vartheta_{12}^2(v_1, v_2)-\vartheta_{34}^2(v_1, v_2), \\ 4C_{01}\Theta_{01}(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5^2(v_1, v_2)-\vartheta_0^2(v_1, v_2)-\vartheta_{12}^2(v_1, v_2)+\vartheta_{34}^2(v_1, v_2); \end{cases}$$

$$(8.)\quad \begin{cases} 2C_{14}\Theta_{14}(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_0\,(v_1, v_2)-\vartheta_{12}(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2), \\ 2C_{03}\Theta_{03}(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{12}(v_1, v_2)-\vartheta_{34}(v_1, v_2)\vartheta_0(v_1, v_2), \\ 2C_2\,\Theta_2\,(2v_1, 2v_2) = \vartheta_5(v_1, v_2)\vartheta_{34}(v_1, v_2)-\vartheta_0(v_1, v_2)\vartheta_{12}(v_1, v_2). \end{cases}$$

*) Dieses Journal, Bd. 64 S. 37.

Für $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ erhält man hieraus zwischen den Nullwerthen der transformirten und der ursprünglichen Thetafunctionen die Relationen:

$$(9.)\quad \begin{cases} 4C_5^2 &= c_5^2+c_0^2+c_{12}^2+c_{34}^2,\\ 2C_0^2 &= c_5c_0+c_{12}c_{34},\\ 2C_{12}^2 &= c_5c_{12}+c_{34}c_0,\\ 2C_{34}^2 &= c_5c_{34}+c_0c_{12};\end{cases}$$

$$(10.)\quad \begin{cases} 4C_{23}^2 = c_5^2+c_0^2-c_{12}^2-c_{34}^2, & 2C_{14}^2 = c_5c_0-c_{12}c_{34},\\ 4C_4^2 = c_5^2-c_0^2+c_{12}^2-c_{34}^2, & 2C_{03}^2 = c_5c_{12}-c_{34}c_0,\\ 4C_{01}^2 = c_5^2-c_0^2-c_{12}^2+c_{34}^2, & 2C_2^2 = c_5c_{34}-c_0c_{12}.\end{cases}$$

Da c_5 positiv ist, so folgt aus den Gleichungen (9.) und (10.), dass auch c_0, c_{12}, c_{34} positive Grössen sind, mithin bestehen die Ungleichungen

$$c_5 > c_0 > 0,\quad c_5 > c_{12} > 0,\quad c_5 > c_{34} > 0.$$

Die vier Gleichungen (9.) lassen sich entsprechend der einen Relation, in die *Borchardt* die vier den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen definirenden Gleichungen zusammengefasst hat, durch die eine Gleichung

$$(9^*.)\quad 4(C_5^2+\varepsilon_1C_0^2+\varepsilon_2C_{12}^2+\varepsilon_1\varepsilon_2C_{34}^2) = (c_5+\varepsilon_1c_0+\varepsilon_2c_{12}+\varepsilon_1\varepsilon_2c_{34})^2$$

ersetzen, wenn jeder der Grössen ε_1, ε_2 der doppelte Werth $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ beigelegt wird.

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$\begin{aligned} C_5^2+C_0^2+C_{12}^2+C_{34}^2 &= \mathfrak{a}_1',\\ C_5^2+C_0^2-C_{12}^2-C_{34}^2 &= \mathfrak{b}_1',\\ C_5^2-C_0^2+C_{12}^2-C_{34}^2 &= \mathfrak{c}_1',\\ C_5^2-C_0^2-C_{12}^2+C_{34}^2 &= \mathfrak{e}_1',\end{aligned}$$

so sind $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$, $\mathfrak{e}_1'$ zu Folge der Gleichung (9*.) positiv, und es ergiebt sich durch Auflösung der Gleichungen (9.) nach c_5, c_0, c_{12}, c_{34}

$$\begin{aligned} 2c_5 &= \sqrt{\mathfrak{a}_1'}+\sqrt{\mathfrak{b}_1'}+\sqrt{\mathfrak{c}_1'}+\sqrt{\mathfrak{e}_1'},\\ 2c_0 &= \sqrt{\mathfrak{a}_1'}+\sqrt{\mathfrak{b}_1'}-\sqrt{\mathfrak{c}_1'}-\sqrt{\mathfrak{e}_1'},\\ 2c_{12} &= \sqrt{\mathfrak{a}_1'}-\sqrt{\mathfrak{b}_1'}+\sqrt{\mathfrak{c}_1'}-\sqrt{\mathfrak{e}_1'},\\ 2c_{34} &= \sqrt{\mathfrak{a}_1'}-\sqrt{\mathfrak{b}_1'}-\sqrt{\mathfrak{c}_1'}+\sqrt{\mathfrak{e}_1'}.\end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichungen (10.) stellt C_{23}^2, C_4^2, C_{01}^2, C_{14}^2, C_{03}^2, C_2^2 durch $\sqrt{\mathfrak{a}_1'}$, $\sqrt{\mathfrak{b}_1'}$, $\sqrt{\mathfrak{c}_1'}$, $\sqrt{\mathfrak{e}_1'}$ dar, man erhält also Relationen zwischen den Quadraten der Nullwerthe der transformirten Θ-Functionen. Da genau

entsprechende Relationen zwischen den Quadraten der Nullwerthe der ϑ-Functionen mit den ursprünglichen Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} bestehen müssen, so ist, wenn analog dem Vorhergehenden

$$(11.)\qquad \begin{cases} c_5^2+c_0^2+c_{12}^2+c_{34}^2 = \mathfrak{a}', \\ c_5^2+c_0^2-c_{12}^2-c_{34}^2 = \mathfrak{b}', \\ c_5^2-c_0^2+c_{12}^2-c_{34}^2 = \mathfrak{c}', \\ c_5^2-c_0^2-c_{12}^2+c_{34}^2 = \mathfrak{e}' \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$(12.)\qquad \begin{cases} 2c_{23}^2 = \sqrt{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}+\sqrt{\mathfrak{c}'\mathfrak{e}'}, & 2c_{14}^2 = \sqrt{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}-\sqrt{\mathfrak{c}'\mathfrak{e}'}, \\ 2c_4^2 = \sqrt{\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'}+\sqrt{\mathfrak{e}'\mathfrak{b}'}, & 2c_{03}^2 = \sqrt{\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'}-\sqrt{\mathfrak{e}'\mathfrak{b}'}, \\ 2c_{01}^2 = \sqrt{\mathfrak{a}'\mathfrak{e}'}+\sqrt{\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'}, & 2c_2^2 = \sqrt{\mathfrak{a}'\mathfrak{e}'}-\sqrt{\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'}. \end{cases}$$

Die Quadrate der Nullwerthe auf den linken Seiten dieser Gleichungen genügen, wie im ersten Paragraphen bemerkt wurde, den Ungleichungen

$$c_{23}^2-c_{14}^2 > 0, \quad c_4^2-c_{03}^2 > 0, \quad c_{01}^2-c_2^2 > 0,$$

und hieraus folgt, dass in allen Gleichungen dieses Paragraphen den Quadratwurzeln der positive Werth beizulegen ist.

Da C_5, C_0, C_{12}, C_{34}, C_{23}, C_4, C_{01} stets positiv sind, so erhält man mit Hülfe der Relationen (9.), (10.) und (11.) aus dem Gleichungssysteme (12.):

$$(13.)\qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}c_{23}^2 = C_5C_{23}+C_4\,C_{01}, & \tfrac{1}{2}c_{14}^2 = C_5C_{23}-C_4\,C_{01}, \\ \tfrac{1}{2}c_4^2 = C_5C_4+C_{01}C_{23}, & \tfrac{1}{2}c_{03}^2 = C_5C_4-C_{01}C_{23}, \\ \tfrac{1}{2}c_{01}^2 = C_5C_{01}+C_{23}C_4, & \tfrac{1}{2}c_2^2 = C_5C_{01}-C_{23}C_4. \end{cases}$$

Die Nullwerthe der transformirten Thetafunctionen genügen analogen Ungleichungen, wie die der ursprünglichen Thetafunctionen; es ist demnach stets C_5 grösser, als jede der drei Grössen C_0, C_{12}, C_{34}, und die Determinanten

$$C_5^2C_0^2-C_{12}^2C_{34}^2, \quad C_5^2C_{12}^2-C_0^2C_{34}^2, \quad C_5^2C_{34}^2-C_0^2C_{12}^2$$

sind positiv. Ihrer Grösse nach geordnet folgen C_5, C_0, C_{12}, C_{34} in derselben Reihenfolge auf einander, wie c_5, c_0, c_{12}, c_{34}; ist insbesondere $c_5 > c_0 > c_{12} > c_{34}$, so ist auch $C_5 > C_0 > C_{12} > C_{34}$.

3.

Die beiden hyperelliptischen Gebilde

$$\xi^2 = R(x) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)x$$

und

$$\eta^2 = R_1(y) = (y-\beta_0)(y-\beta_1)(y-\beta_2)(y-\beta_3)y$$

mögen der Art zusammenhängen, dass die Moduln der aus dem Gebilde $\eta^2 = R_1(y)$ hervorgehenden Thetafunctionen $\Theta_\lambda(2v_1, 2v_2)$ und $\Theta_{\mu\nu}(2v_1, 2v_2)$ das Doppelte der Moduln der Thetafunctionen $\vartheta_\lambda(v_1, v_2)$ und $\vartheta_{\mu\nu}(v_1, v_2)$ sind, welche dem Gebilde $\xi^2 = R(x)$ zugehören. Die den beiden hyperelliptischen Gebilden zugehörigen ϑ- und Θ-Functionen hängen also dann durch eine solche Transformation zweiten Grades, wie sie im vorhergehenden Paragraphen behandelt worden ist, zusammen.

Aus den Betrachtungen des ersten Paragraphen ergiebt sich, dass die Verhältnisse der vier Grössen β_0, β_1, β_2, β_3, für welche $R_1(y)$ verschwindet, sich durch die Nullwerthe C_λ, $C_{\mu\nu}$ der Θ-Functionen darstellen lassen, und zwar ist nach den Gleichungen (5.)

$$(14.) \quad \beta_0 = \varepsilon' C_{23}^2 C_5^2 C_{12}^2, \quad \beta_1 = \varepsilon' C_{12}^2 C_4^2 C_{01}^2, \quad \beta_2 = \varepsilon' C_{01}^2 C_5^2 C_{03}^2, \quad \beta_3 = \varepsilon' C_{03}^2 C_4^2 C_{23}^2,$$

wobei ε' einen positiven Factor bedeutet.

Sind also die Grössen α_0, α_1, α_2, α_3, für welche $R(x)$ verschwindet, gegeben, so sind c_5, c_0, c_{12}, c_{34} als die Nullwerthe der vier mit entsprechenden Indices versehenen ϑ-Functionen, welche dem hyperelliptischen Gebilde $\xi^2 = R(x)$ zugehören, bestimmt, und hieraus lassen sich mittelst der Relationen (9.) die Grössen C_5^2, C_0^2, C_{12}^2, C_{34}^2 und mit Hülfe der Relationen, welche aus den Gleichungen (12.) durch Vertauschung von c_λ, $c_{\mu\nu}$ mit C_λ, $C_{\mu\nu}$ hervorgehen, die Grössen C_{23}^2, C_4^2, C_{01}^2, C_{03}^2 berechnen; nach den Gleichungen (14.) ergeben sich dann unmittelbar die Verhältnisse der Grössen β_0, β_1, β_2, β_3. Der Bemerkung am Schlusse des § 1 gemäss genügen auch diese letzteren Grössen der Ungleichung

$$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0.$$

Werden nun $\omega_{\lambda\mu}$, $\omega'_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2)$ durch die Gleichungen (1.) als halbe primitive Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung

$$\int \frac{a_{\lambda 1} + a_{\lambda 2} x}{\sqrt{R(x)}}\, dx \qquad (\lambda = 1, 2)$$

definirt, und die vier reellen Grössen b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\beta_0}^{\beta_1} \frac{b_{\lambda 1} + b_{\lambda 2} y}{\sqrt{R_1(y)}}\, dy &= \omega'_{\lambda 1}, \\ \int_{\beta_0}^{\beta_1} \frac{b_{\lambda 1} + b_{\lambda 2} y}{\sqrt{R_1(y)}}\, dy + \int_{\beta_2}^{\beta_3} \frac{b_{\lambda 1} + b_{\lambda 2} y}{\sqrt{R_1(y)}}\, dy &= \omega'_{\lambda 2} \end{aligned} \qquad (\lambda = 1, 2)$$

bestimmt, wobei die Quadratwurzel $\sqrt{R_1(y)}$ den im ersten Paragraphen getroffenen Festsetzungen entsprechend zu fixiren ist, so folgt, da die aus dem Gebilde $\eta^2 = R_1(y)$ hervorgehenden θ-Functionen die Moduln $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$, $2\tau_{22}$ haben, dass

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy = \tfrac{1}{2}\omega_{\lambda 1}, \quad \int_{\beta_3}^{0} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy = \tfrac{1}{2}\omega_{\lambda 2} \qquad (\lambda = 1, 2)$$

ist. Setzt man für $\omega_{\lambda 1}$, $\omega_{\lambda 2}$ die Werthe aus den Gleichungen (1.) ein, so ergiebt sich, wenn die Quadratwurzeln in den Nennern auf beiden Seiten ihre positiven Werthe erhalten,

$$(15.)\quad \begin{cases} \omega_{\lambda 1} = -\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx = -2\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy, \\ \omega_{\lambda 2} = \displaystyle\int_{\alpha_3}^{0} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx = 2\int_{\beta_3}^{0} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy. \end{cases} \qquad (\lambda = 1, 2)$$

Demnach ist die aus den halben reellen primitiven Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung $\int \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx$ $(\lambda = 1, 2)$ gebildete Determinante

$$(16.)\quad \begin{cases} \omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21} = (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\displaystyle\int_0^{\alpha_3} dx_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx_1 \frac{x_1-x_2}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} \\ \qquad = 4(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})\displaystyle\int_0^{\beta_3} dy_2 \int_{\beta_2}^{\beta_1} dy_1 \frac{y_1-y_2}{\sqrt{R_1(y_1)}\sqrt{R_1(y_2)}}; \end{cases}$$

bei dem Uebergang von dem hyperelliptischen Gebilde $\xi^2 = R(x)$ zu dem hyperelliptischen Gebilde $\eta^2 = R_1(y)$ ändert sich mithin diese Determinante nur um einen constanten Factor. Da der Voraussetzung nach die Determinante $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \gtrless 0$ ist, so ist auch die Determinante $b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}$ von Null verschieden.

Um die Constanten b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} durch die Constanten a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} und die Werthe α_ν und β_ν $(\nu = 0, 1, 2, 3)$, für welche die ganzen rationalen Functionen $R(x)$ und $R_1(y)$ verschwinden, auszudrücken, kann man von den Gleichungen

$$(17.)\quad \int_0^{x_1} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx + \int_{\alpha_3}^{x_2} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx = 2\omega_{\lambda 1}w_1+2\omega_{\lambda 2}w_2 \qquad (\lambda = 1, 2)$$

und

$$(18.)\quad \int_0^{y_1} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy + \int_{\infty}^{y_2} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy = 2\omega_{\lambda 1}w_1+2\omega_{\lambda 2}w_2 \qquad (\lambda = 1, 2)$$

ausgehen. Die durch Lösung des Umkehrproblems aus dem System (17.) hervorgehenden *Abel*schen Functionen, die symmetrische Functionen von x_1, x_2 sind, lassen sich als Quotienten von Functionen $\vartheta_\lambda(w_1, w_2)$ und $\vartheta_{\mu\nu}(w_1, w_2)$, und die aus dem System (18.) hervorgehenden *Abel*schen Functionen, die symmetrisch in Bezug auf y_1, y_2 sind, als Quotienten der transformirten Functionen $\Theta_\lambda(2w_1, 2w_2)$ und $\Theta_{\mu\nu}(2w_1, 2w_2)$ darstellen. Aus den Gleichungen (6.), (7.) und (8.) zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetafunctionen ergiebt sich somit der algebraische Zusammenhang zwischen x_1, x_2 und y_1, y_2, der für das Bestehen der Gleichungen

$$(19.) \quad \int_0^{x_1} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx + \int_{a_3}^{x_2} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx = \int_0^{y_1} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy + \int_\infty^{y_2} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy \qquad (\lambda = 1, 2)$$

nothwendig und hinreichend ist, und damit auch als Specialfall derjenige zwischen x und y', y'', der aus den Integralgleichungen

$$(20.) \quad \int_0^{x} \frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx = \int_0^{y'} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy + \int_\infty^{y''} \frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}\,dy \qquad (\lambda = 1, 2)$$

hervorgeht. Nur für diesen Specialfall werden im Folgenden die Rechnungen vollständig durchgeführt werden. Entwickelt man sodann beide Seiten dieser letzteren Gleichungen nach Potenzen von x, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten der entsprechenden Potenzen die Bestimmung von b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}.

Die für das Bestehen der Gleichungen (20.) nothwendige und hinreichende quadratische Gleichung, deren Coefficienten rational in x und deren Wurzeln die Grössen y' und y'' sind, ist von *Richelot**) und von mir in meiner früher veröffentlichten Arbeit über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen durch algebraische Transformation der hyperelliptischen Integrale, von *Königsberger***) dagegen mittelst Transformation zweiten Grades der *Abel*schen Functionen hergeleitet worden. Der letztere Weg soll auch hier eingeschlagen werden; die auszuführenden Rechnungen unterscheiden sich jedoch von denen *Königsberger*s dadurch, dass anstatt der von *Richelot* und von *Rosenhain* eingeführten Moduln

$$\varkappa^2 = \frac{c_4^2 c_{23}^2}{c_5^2 c_{01}^2}, \quad \lambda^2 = \frac{c_{23}^2 c_{03}^2}{c_{01}^2 c_{12}^2}, \quad \mu^2 = \frac{c_{03}^2 c_4^2}{c_{12}^2 c_5^2}$$

*) Dieses Journal, Bd. 16 S. 221.

**) Dieses Journal, Bd. 64 S. 38.

und der entsprechend aus den Nullwerthen C_λ, $C_{\mu\nu}$ der transformirten θ-Functionen gebildeten Moduln hier die Grössen α_0, α_1, α_2, α_3 resp. β_0, β_1, β_2, β_3 selbst beibehalten werden, da dies für die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels geeigneter ist. Die Wahl der unteren Grenzen in den vorhergehenden Integralgleichungen (17.—20.) steht im Einklang mit der von *Richelot* und *Königsberger* getroffenen und dient zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen.

Um die Formeln (3.) und (4.) für die Darstellung der *Abel*schen Functionen durch die Thetafunctionen auf die Gleichungen (17.) und (18.) anwenden zu können, müssen zunächst auf beiden Seiten dieser Gleichungen constante Grössen der Art hinzugefügt werden, dass die unteren Grenzen der Integrale gleich α_1, α_3 resp. gleich β_1, β_3 werden. Wenn zur Abkürzung

$$v_1 = w_1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tau_{11}+\tfrac{1}{2}\tau_{12}, \quad v_2 = w_2+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tau_{12}+\tfrac{1}{2}\tau_{22},$$
$$v_1' = w_1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\tau_{11}, \quad v_2' = w_2+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tau_{12}$$

gesetzt wird, so erhält man aus (17.) und (18.)

$$\int_{\alpha_1}^{x_1}\frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}dx+\int_{\alpha_3}^{x_2}\frac{a_{\lambda 1}+a_{\lambda 2}x}{\sqrt{R(x)}}dx \;=\; 2\omega_{\lambda 1}v_1+2\omega_{\lambda 2}v_2 \qquad (\lambda = 1,\,2),$$
$$\int_{\beta_1}^{y_1}\frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}dy+\int_{\beta_3}^{y_2}\frac{b_{\lambda 1}+b_{\lambda 2}y}{\sqrt{R_1(y)}}dy \;=\; 2\omega_{\lambda 1}v_1'+2\omega_{\lambda 2}v_2' \qquad (\lambda = 1,\,2).$$

Aus dem letzteren dieser beiden Gleichungssysteme ergeben sich durch Lösung des Umkehrproblems vier Gleichungen, welche aus der ersten Gleichung des Systems (3.) für $\mu = 0$, 1 und aus der zweiten Gleichung jenes Systems für $\mu = 1$, 2 durch Vertauschung von α_0, α_1, α_2, α_3 resp. mit β_0, β_1, β_2, β_3 und der Functionen $\vartheta_\lambda(v_1, v_2)$ mit den Functionen $\Theta_\lambda(2v_1', 2v_2')$ hervorgehen. Dividirt man je zwei dieser Gleichungen durch einander, so folgt

$$\sqrt{\frac{\beta_1(\beta_0-y_1)(\beta_0-y_2)}{\beta_0(\beta_1-y_1)(\beta_1-y_2)}} \;=\; \frac{C_{34}}{C_2}\cdot\frac{\Theta_0(2v_1',\,2v_2')}{\Theta_1(2v_1',\,2v_2')},$$
$$\sqrt{\frac{\beta_3(\beta_2-y_1)(\beta_2-y_2)}{\beta_2(\beta_3-y_1)(\beta_3-y_2)}} \;=\; \frac{C_{14}}{C_0}\cdot\frac{\Theta_2(2v_1',\,2v_2')}{\Theta_3(2v_1',\,2v_2')},$$

wenn man beachtet, dass zu Folge der Gleichungen (14.) und der Relationen unter den Quadraten der Nullwerthe der Thetafunctionen bei geeigneter Bestimmung der Wurzelgrössen

$$\sqrt[4]{-\frac{R_1'(\beta_1)}{R_1'(\beta_0)}} = \frac{C_2C_4C_{01}}{C_5C_{23}C_{34}} = \frac{C_2}{C_{34}}\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_0}},$$
$$\sqrt[4]{-\frac{R_1'(\beta_3)}{R_1'(\beta_2)}} = \frac{C_0C_4C_{23}}{C_5C_{01}C_{14}} = \frac{C_0}{C_{14}}\sqrt{\frac{\beta_3}{\beta_2}}$$

gesetzt werden kann. Reducirt man nun die Θ-Functionen mit den Argu- menten $2v'_1$, $2v'_2$ auf solche mit den Argumenten $2w_1$, $2w_2$ mittelst der Re- lationen

$$\begin{aligned}
\Theta_0(2v'_1,\ 2v'_2) &= \Theta_2\,(2w_1,\ 2w_2)e^{(2w_1-\frac{1}{2}\tau_{11})\pi i},\\
\Theta_1(2v'_1,\ 2v'_2) &= \Theta_{34}(2w_1,\ 2w_2)e^{(2w_1-\frac{1}{2}\tau_{11})\pi i},\\
\Theta_2(2v'_1,\ 2v'_2) &= i\Theta_0\,(2w_1,\ 2w_2)e^{(2w_1-\frac{1}{2}\tau_{11})\pi i},\\
\Theta_3(2v'_1,\ 2v'_2) &= i\Theta_{14}(2w_1,\ 2w_2)e^{(2w_1-\frac{1}{2}\tau_{11})\pi i}
\end{aligned}$$

und wendet sodann die Gleichungen (6.) und (8.) zwischen den transformirten und den ursprünglichen Thetafunctionen an, so folgt

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\beta_1(\beta_0-y_1)(\beta_0-y_2)}{\beta_0(\beta_1-y_1)(\beta_1-y_2)}} &= \frac{C_{34}}{C_2}\cdot\frac{\Theta_2(2w_1,\ 2w_2)}{\Theta_{34}(2w_1,\ 2w_2)}\\
&= \frac{C_{34}^2}{C_2^2}\cdot\frac{\vartheta_5(w_1,\ w_2)\vartheta_{34}(w_1,\ w_2)-\vartheta_0(w_1,\ w_2)\vartheta_{12}(w_1,\ w_2)}{\vartheta_5(w_1,\ w_2)\vartheta_{34}(w_1,\ w_2)+\vartheta_0(w_1,\ w_2)\vartheta_{12}(w_1,\ w_2)},\\
\sqrt{\frac{\beta_3(\beta_2-y_1)(\beta_2-y_2)}{\beta_2(\beta_3-y_1)(\beta_3-y_2)}} &= \frac{C_{14}}{C_0}\cdot\frac{\Theta_0(2w_1,\ 2w_2)}{\Theta_{14}(2w_1,\ 2w_2)}\\
&= \frac{C_{14}^2}{C_0^2}\cdot\frac{\vartheta_5(w_1,\ w_2)\vartheta_0(w_1,\ w_2)+\vartheta_{12}(w_1,\ w_2)\vartheta_{34}(w_1,\ w_2)}{\vartheta_5(w_1,\ w_2)\vartheta_0(w_1,\ w_2)-\vartheta_{12}(w_1,\ w_2)\vartheta_{34}(w_1,\ w_2)}.
\end{aligned}$$

Zwischen den ϑ-Functionen mit den Argumenten w_1, w_2 und denjenigen mit den Argumenten v_1, v_2 bestehen die Relationen

$$\begin{aligned}
\vartheta_5\,(w_1,\ w_2) &= \vartheta_{14}(v_1,\ v_2)e^{-V\pi i},\\
\vartheta_0\,(w_1,\ w_2) &= \vartheta_{23}(v_1,\ v_2)e^{-V\pi i},\\
\vartheta_{12}(w_1,\ w_2) &= -i\vartheta_{24}(v_1,\ v_2)e^{-V\pi i},\\
\vartheta_{34}(w_1,\ w_2) &= i\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)e^{-V\pi i},
\end{aligned}$$

in denen zur Abkürzung

$$V = v_1-v_2+\tfrac{1}{4}(\tau_{11}-2\tau_{12}+\tau_{22})$$

gesetzt ist; mit Hülfe derselben erhält man

$$\text{(21.)}\quad \sqrt{\frac{\beta_1(\beta_0-y_1)(\beta_0-y_2)}{\beta_0(\beta_1-y_1)(\beta_1-y_2)}} = \frac{C_{34}^2}{C_2^2}\cdot\frac{\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{14}(v_1,\ v_2)+\vartheta_{23}(v_1,\ v_2)\vartheta_{24}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{14}(v_1,\ v_2)-\vartheta_{23}(v_1,\ v_2)\vartheta_{24}(v_1,\ v_2)},$$

$$\text{(22.)}\quad \sqrt{\frac{\beta_3(\beta_2-y_1)(\beta_2-y_2)}{\beta_2(\beta_3-y_1)(\beta_3-y_2)}} = \frac{C_{14}^2}{C_0^2}\cdot\frac{\vartheta_{14}(v_1,\ v_2)\vartheta_{23}(v_1,\ v_2)+\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{24}(v_1,\ v_2)}{\vartheta_{14}(v_1,\ v_2)\vartheta_{23}(v_1,\ v_2)-\vartheta_{13}(v_1,\ v_2)\vartheta_{24}(v_1,\ v_2)}.$$

Nach den Formeln (3.) und (4.) lassen sich nun die rechten Seiten dieser Gleichungen durch symmetrische Functionen von x_1, x_2 ausdrücken, wodurch man die algebraische Beziehung zwischen x_1, x_2 und y_1, y_2, welche für das Bestehen der Gleichungen (19.) nothwendig und hinreichend ist, erhält.

Wie schon oben bemerkt wurde, ist aber für den hier vorliegenden Zweck allein der Fall von Interesse, in dem die Gleichungen (19.) sich auf die Gleichungen (20.) reduciren, in denen auf den linken Seiten nur je ein Integral steht; es werde daher $x_2 = \alpha_3$ gesetzt und x, y', y'' resp. für x_1, y_1, y_2 geschrieben. Dann ergiebt sich aus (21.) mittelst der Gleichungen (3.), (4.), (5.) und der Relationen unter den Nullwerthen der ursprünglichen und der transformirten Thetafunctionen

$$\sqrt{\frac{\beta_1(\beta_0-y')(\beta_0-y'')}{\beta_0(\beta_1-y')(\beta_1-y'')}} = \frac{C_{34}^2}{C_2^2}\cdot\frac{\sqrt{\alpha_0-\alpha_2}-\sqrt{\alpha_0-\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_0-\alpha_2}+\sqrt{\alpha_0-\alpha_1}}$$

$$= \frac{C_{34}^2}{C_2^2}\,\frac{c_5c_{34}-c_0c_{12}}{c_5c_{34}+c_0c_{12}} = 1,$$

mithin

$$y'y'' = \beta_0\beta_1;$$

das Product der beiden oberen Grenzen y' und y'' der Integrale auf den rechten Seiten der Gleichungen (20.) ist also von x unabhängig.

Zur Ermittelung der Summe $y'+y''$ braucht man nur die rechte Seite der Gleichung (22.) mittelst der Formeln (3.) und (4.) durch x auszudrücken und auf der linken Seite den eben für das Product $y'y''$ gefundenen Werth einzuführen. Dadurch folgt zunächst

$$\sqrt{\frac{\beta_3(\beta_2-y')(\beta_2-y'')}{\beta_2(\beta_3-y')(\beta_3-y'')}} = \frac{C_{14}^2}{C_0^2}\cdot\frac{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_3)(x-\alpha_2)}+\sqrt{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_3)(x-\alpha_1)}}{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_3)(x-\alpha_2)}-\sqrt{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_3)(x-\alpha_1)}}$$

$$= \frac{1-\dfrac{x}{\alpha_3}+B\dfrac{x}{\alpha_3}}{1-\dfrac{x}{\alpha_3}-B\dfrac{x}{\alpha_3}},$$

wobei zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2}} = \frac{\sqrt{\beta_0\beta_1}-\sqrt{\beta_2\beta_3}}{\sqrt{\beta_0\beta_1}+\sqrt{\beta_2\beta_3}}\cdot\frac{\sqrt{\beta_2}-\sqrt{\beta_3}}{\sqrt{\beta_2}+\sqrt{\beta_3}} = B$$

gesetzt ist. Substituirt man nun für das Product $y'y''$ den Werth $\beta_0\beta_1$, so erhält man

$$y'+y'' = \frac{(\beta_0\beta_1+\beta_2\beta_3)(\beta_2+\beta_3)}{2\beta_2\beta_3} + \frac{(\beta_0\beta_1-\beta_2\beta_3)(\beta_2-\beta_3)}{4\beta_2\beta_3 B}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{x}{\alpha_3}\right)^2+B^2\dfrac{x^2}{\alpha_3^2}}{\dfrac{x}{\alpha_3}\left(1-\dfrac{x}{\alpha_3}\right)}.$$

Es bestehen demnach die beiden Integralgleichungen (20.), wenn y' und y''

die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(23.)\quad y^2-\left\{\frac{(\beta_0\beta_1+\beta_2\beta_3)(\beta_2+\beta_3)}{2\beta_2\beta_3}+\frac{(\beta_0\beta_1-\beta_2\beta_3)(\beta_2-\beta_3)}{4\beta_2\beta_3 B}\cdot\frac{\left(1-\frac{x}{\alpha_3}\right)^2+B^2\frac{x^2}{\alpha_3^2}}{\frac{x}{\alpha_3}\left(1-\frac{x}{\alpha_3}\right)}\right\}y+\beta_0\beta_1=0$$

sind. Die Coefficienten dieser quadratischen Gleichung lassen sich auch durch α_0, α_1, α_2, α_3, β_3 statt durch α_3, β_0, β_1, β_2, β_3 darstellen*).

Um nun die Constanten b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} zu bestimmen, kann man für Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach hinreichend klein sind, aus der Gleichung (23.) y' und y'' als Functionen von x ausdrücken und beide Seiten der Gleichungen (20.) nach steigenden Potenzen von x entwickeln. Die Vergleichung der Coefficienten von $x^{\frac{1}{2}}$ und $x^{\frac{3}{2}}$ auf beiden Seiten ergiebt mit Hülfe der Relationen (5.), (14.) und der in § 2 entwickelten Formeln

$$\begin{aligned}
b_{\lambda 1} &= \left\{\frac{2\sqrt{\beta_0\beta_1}}{\sqrt{\beta_0\beta_1}+\sqrt{\beta_2\beta_3}}\,\frac{\alpha_{\lambda 1}}{\alpha_3}+\alpha_{\lambda 2}\right\}\frac{\sqrt{\beta_0}+\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta_0\beta_1}-\sqrt{\beta_2\beta_3}}\,\frac{\sqrt[4]{\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3}}{\sqrt{\alpha_3}}\sqrt{\beta_2\beta_3},\\
b_{\lambda 2} &= \left\{\frac{2\sqrt{\beta_2\beta_3}}{\sqrt{\beta_0\beta_1}+\sqrt{\beta_2\beta_3}}\,\frac{\alpha_{\lambda 1}}{\alpha_3}+\alpha_{\lambda 2}\right\}\frac{\sqrt{\beta_0}+\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta_0\beta_1}-\sqrt{\beta_2\beta_3}}\,\frac{\sqrt[4]{\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3}}{\sqrt{\alpha_3}},
\end{aligned}\qquad (\lambda=1,2)$$

wobei allen Wurzelgrössen ihr positiver Werth beizulegen ist.

Aus der quadratischen Gleichung (23.), welche die algebraische Beziehung zwischen den oberen Grenzen der Integrale in den Gleichungen (20.) giebt, lassen sich wieder die Gleichungen (15.) zwischen den reellen Perioden der aus den hyperelliptischen Gebilden $\xi^2=R(x)$ und $\eta^2=R_1(y)$ hervorgehenden Integrale erster Gattung ableiten. Durchläuft nämlich die Variable x stetig wachsend die Intervalle

$$\left(0\cdots\frac{\alpha_3}{1+B}\right),\quad\left(\frac{\alpha_3}{1+B}\cdots\alpha_3\right);\quad\left(\alpha_2\cdots\frac{\alpha_3}{1-B}\right),\quad\left(\frac{\alpha_3}{1-B}\cdots\alpha_1\right),$$

so ist nach den im ersten Paragraphen getroffenen Festsetzungen $\sqrt{R(x)}$ resp.

positiv, positiv; negativ, negativ

zu nehmen; die eine Wurzel y' der quadratischen Gleichung (23.) durchläuft dann stetig die Intervalle

$$(0\ldots\beta_3),\qquad(\beta_3\ldots 0);\qquad(\beta_1\ldots\beta_2),\qquad(\beta_2\ldots\beta_1),$$

*) Dieses Journal, Bd. 89 S. 236, Formel (24.).

wobei die Quadratwurzel $\sqrt{R_1(y')}$ resp.

positiv, negativ; positiv, negativ

ist; die andere Wurzel y'' durchläuft die Werthe

$$\left(+\infty\cdots\frac{\beta_0\beta_1}{\beta_2}\right),\quad \left(\frac{\beta_0\beta_1}{\beta_2}\cdots+\infty\right);\quad \left(\beta_0\cdots\frac{\beta_0\beta_1}{\beta_2}\right),\quad \left(\frac{\beta_0\beta_1}{\beta_2}\cdots\beta_0\right),$$

während die Quadratwurzel $\sqrt{R_1(y'')}$ weder im Intervall $\left(+\infty\cdots\frac{\beta_0\beta_1}{\beta_2}\cdots+\infty\right)$, noch im Intervall $\left(\beta_0\cdots\frac{\beta_0\beta_1}{\beta_2}\cdots\beta_0\right)$ verschwindet, also in keinem dieser Intervalle das Zeichen wechselt. Hiernach folgen aus den Gleichungen (20.) unmittelbar die Gleichungen (15.).

Aus den vorher gefundenen Werthen der Grössen $b_{\lambda 1}$ und $b_{\lambda 2}$ ergiebt sich der Quotient der Determinanten

$$\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} = \frac{2}{\alpha_3^2}\frac{(\sqrt{\beta_0}+\sqrt{\beta_1})^2}{\beta_0\beta_1-\beta_2\beta_3}\beta_2\beta_3\sqrt{\beta_0\beta_1},$$

demnach geht die Gleichung (16.) über in

$$\int_0^{\alpha_3} dx_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx_1 \frac{x_1-x_2}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}$$
$$= \frac{8}{\alpha_3^2}\frac{(\sqrt{\beta_0}+\sqrt{\beta_1})^2}{\beta_0\beta_1-\beta_2\beta_3}\beta_2\beta_3\sqrt{\beta_0\beta_1}\int_0^{\beta_3} dy_2 \int_{\beta_2}^{\beta_1} dy_1 \frac{y_1-y_2}{\sqrt{R_1(y_1)}\sqrt{R_1(y_2)}}.$$

Die Ausdrücke (5.) und (14.) für α_3, β_0, β_1, β_2, β_3 enthalten noch die beiden willkürlichen positiven Grössen ε und ε'; bestimmt man daher deren Verhältniss so, dass der constante Factor auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung der Einheit gleich wird, so gelangt man zu dem Resultat:

„Es besteht die Gleichung

$$(24.)\quad \int_0^{\alpha_3} dx_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx_1 \frac{x_1-x_2}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} = \int_0^{\beta_3} dy_2 \int_{\beta_2}^{\beta_1} dy_1 \frac{y_1-y_2}{\sqrt{R_1(y_1)}\sqrt{R_1(y_2)}},$$

wenn die Grössen $\alpha_0, \ldots, \alpha_3, \beta_0, \ldots, \beta_3$, für welche die ganzen rationalen Functionen $R(x)$ und $R_1(y)$ verschwinden, in dem durch die Relationen

$$(25.)\quad \begin{cases} \alpha_0 = \delta\frac{c_{23}^2c_5^2c_{12}^2}{\Delta'}, & \alpha_1 = \delta\frac{c_{12}^2c_4^2c_{01}^2}{\Delta'}, & \alpha_2 = \delta\frac{c_{01}^2c_5^2c_{03}^2}{\Delta'}, & \alpha_3 = \delta\frac{c_{03}^2c_4^2c_{23}^2}{\Delta'}, \\ \beta_0 = \delta\frac{C_{23}^2C_5^2C_{12}^2}{\Delta_1'}, & \beta_1 = \delta\frac{C_{12}^2C_4^2C_{01}^2}{\Delta_1'}, & \beta_2 = \delta\frac{C_{01}^2C_5^2C_{03}^2}{\Delta_1'}, & \beta_3 = \delta\frac{C_{03}^2C_4^2C_{23}^2}{\Delta_1'} \end{cases}$$



gegebenen Zusammenhang stehen, wobei die reellen positiven Werthe der vierten Wurzeln

$$(c_5^2 c_0^2 c_2^2 c_4^2 c_{01}^2 c_{03}^2 c_{12}^2 c_{14}^2 c_{23}^2 c_{34}^2)^{\frac{1}{4}} = \varDelta', \quad (C_5^2 C_0^2 C_2^2 C_4^2 C_{01}^2 C_{03}^2 C_{12}^2 C_{14}^2 C_{23}^2 C_{34}^2)^{\frac{1}{4}} = \varDelta'_1,$$

gesetzt sind, während die positive Grösse δ willkürlich bleibt."

Nimmt man an, dass c_{34} die kleinste der vier positiven Grössen c_5, c_0, c_{12}, c_{34} ist, so folgt aus den in (9*.) enthaltenen Relationen

$$4(C_5^2+C_0^2-C_{12}^2-C_{34}^2) = (c_5+c_0-c_{12}-c_{34})^2,$$
$$4(C_5^2-C_0^2+C_{12}^2-C_{34}^2) = (c_5-c_0+c_{12}-c_{34})^2$$

die Ungleichung

$$C_5^2-C_{34}^2 < \tfrac{1}{2}(c_5^2-c_{34}^2),$$

und durch wiederholte Anwendung dieser die Ungleichung

$$\vartheta_5^2(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22})-\vartheta_{34}^2(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}) < \frac{1}{2^n}(c_5^2-c_{34}^2),$$

in der n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Aus der Bemerkung am Schlusse des § 2 ergiebt sich, dass unter der gemachten Voraussetzung stets

$$\vartheta_5(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}) > \vartheta_0(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}) > \vartheta_{34}(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22})$$

und

$$\vartheta_5(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}) > \vartheta_{12}(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}) > \vartheta_{34}(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22})$$

ist, geht man mithin für $n=\infty$ zur Grenze über, so wird

$$\begin{aligned}\lim_{n=\infty}\vartheta_5(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}) &= \lim_{n=\infty}\vartheta_0(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22})\\ &= \lim_{n=\infty}\vartheta_{12}(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22})\\ &= \lim_{n=\infty}\vartheta_{34}(0,0;\,2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}),\end{aligned}$$

und zwar wird, wie man aus der Darstellung der Nullwerthe der Thetafunctionen als unendliche Reihen erkennt, der gemeinsame Grenzwerth gleich 1.

Zu genau demselben Resultat gelangt man, wenn nicht c_{34}, sondern c_0 oder c_{12} die kleinste der vier Grössen c_5, c_0, c_{12}, c_{34} ist.

Wendet man daher die Gleichung (24.) n-mal hinter einander an

und geht für $n = \infty$ zur Grenze über, so ergiebt sich*)

$$(26.)\qquad \int_0^{\alpha_3} dx_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx_1 \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} = \frac{\pi^2}{\delta^2},$$

wenn die Werthe α_0, α_1, α_2, α_3, für welche die ganze rationale Function $R(x)$ verschwindet, durch die in der ersten Reihe des Systems (25.) enthaltenen Ausdrücke bestimmt werden.

4.

Es seien jetzt a, b, c, e irgend vier reelle positive, der Ungleichung

$$a > b > c > e$$

gemäss geordnete Grössen, die der Bedingung

$$ae - bc > 0$$

genügen, woraus sich auch unmittelbar das Bestehen der beiden Ungleichungen $ab - ce > 0$ und $ac - be > 0$ ergiebt. Der Grenzfall, in dem $ae - bc = 0$ ist, wird im folgenden Paragraphen betrachtet werden.

Aus a, b, c, e mögen nun die Hülfsgrössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{e}$ mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} a+b+c+e &= \mathfrak{a}, \\ a+b-c-e &= \mathfrak{b}, \\ a-b+c-e &= \mathfrak{c}, \\ a-b-c+e &= \mathfrak{e} \end{aligned}$$

und hierauf die Hülfsgrössen b', c', e', b'', c'', e'', $\varDelta$ mittelst der Gleichungen

$$(27.)\qquad \begin{cases} \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{e}} = 2b', & \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{e}} = 2b'', \\ \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} + \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{e}} = 2c', & \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} - \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{e}} = 2c'', \\ \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} + \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = 2e', & \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} - \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = 2e'', \\ \qquad (abceb'c'e'b''c''e'')^{\frac{1}{4}} = \varDelta \end{cases}$$

bestimmt werden, und zwar sind zu Folge der Ungleichungen, denen a, b, c, e genügen, auch diese Hülfsgrössen sämmtlich positiv, wenn, wie dies geschehen soll, den Wurzeln der positive Werth beigelegt wird.

Hängen nun mit den Elementen a, b, c, e vier neue Elemente a_1, b_1, c_1, e_1 in derselben Weise zusammen, wie die Quadrate C_5^2, C_0^2, C_{12}^2, C_{34}^2

---

*) Vgl. dieses Journal, Bd. 89 S. 244—246.

der Nullwerthe der transformirten Θ-Functionen mit den Quadraten c_5^2, c_0^2, c_{12}^2, c_{34}^2 der Nullwerthe der ursprünglichen ϑ-Functionen zusammenhängen, so ist nach den Formeln (9.)

$$(28.)\qquad \begin{cases} 4a_1 = a+b+c+e, \\ 2b_1 = \sqrt{ab}+\sqrt{ce}, \\ 2c_1 = \sqrt{ac}+\sqrt{be}, \\ 2e_1 = \sqrt{ae}+\sqrt{bc}, \end{cases}$$

oder, was nach (9*.) dasselbe ist,

$$4(a_1+\varepsilon_1 b_1+\varepsilon_2 c_1+\varepsilon_1\varepsilon_2 e_1) = (\sqrt{a}+\varepsilon_1\sqrt{b}+\varepsilon_2\sqrt{c}+\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{e})^2 \quad (\varepsilon_1 = \pm 1,\ \varepsilon_2 = \pm 1)$$

zu setzen, wobei die sämmtlichen Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind. Die neuen Elemente a_1, b_1, c_1, e_1 genügen dann ebenfalls den Ungleichungen

$$a_1 > b_1 > c_1 > e_1 > 0, \quad a_1 e_1 - b_1 c_1 > 0.$$

Aus den Elementen a_1, b_1, c_1, e_1 mögen ferner Hülfsgrössen b'_1, c'_1, e'_1, b''_1, c''_1, e''_1, $\varDelta_1$ ebenso gebildet werden, wie nach den Gleichungen (27.) die entsprechenden Hülfsgrössen ohne untere Indices aus den Grössen a, b, c, e zu bilden sind.

Nun ist es, wie sich leicht zeigen lässt, stets möglich, die Werthe α_0, α_1, α_2, α_3 so zu bestimmen, dass die Quadrate c_5^2, c_0^2, c_{12}^2, c_{34}^2 der Nullwerthe der aus dem algebraischen Gebilde

$$\xi^2 = R(x) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)x$$

hervorgehenden ϑ-Functionen proportional den Grössen a, b, c, e sind, d. h. dass

$$a = gc_5^2, \quad b = gc_0^2, \quad c = gc_{12}^2, \quad e = gc_{34}^2$$

ist, wo g eine positive Grösse darstellt; und hieraus folgen durch Vergleichung der Gleichungssysteme (12.) und (27.) die Relationen

$$b' = gc_{23}^2, \quad c' = gc_4^2, \quad e' = gc_{01}^2,$$
$$b'' = gc_{14}^2, \quad c'' = gc_{03}^2, \quad e'' = gc_2^2.$$

Die vier Elemente a, b, c, e sind demnach proportional gesetzt den Quadraten der Nullwerthe des Horizontal Haupttheta und derjenigen drei Thetafunctionen, welche aus dem Haupttheta durch Vermehrung beider oder eines der Argumente um $\frac{1}{2}$ hervorgehen. Aus den *Göpel-Rosenhain*schen Relationen unter den Quadraten der Nullwerthe der Thetafunctionen folgt, dass die neun aus

a, b, c, e und den sechs Hülfsgrössen $b', c', \ldots, e''$ gebildeten Quotienten

$$\begin{array}{ccc} \frac{c'}{a}, & \frac{b}{a}, & -\frac{e''}{a}, \\ -\frac{b''}{a}, & \frac{e'}{a}, & \frac{c}{a}; \\ \frac{e}{a}, & -\frac{c''}{a}, & \frac{b'}{a}. \end{array}$$

die Coefficienten einer orthogonalen Substitution mit der Determinante $+1$ bilden, und aus der oben getroffenen Annahme, der zu Folge a, b, c, e ihrer Grösse nach in absteigender Reihe geordnet sind, ergiebt sich, dass jetzt die Ungleichung

$$c_5 > c_0 > c_{12} > c_{34}$$

besteht.

Ganz entsprechende Ausdrücke, wie sich eben für $a, b, \ldots, e''$ durch die Quadrate c_λ^2 und $c_{\mu\nu}^2$ ergeben haben, folgen durch Vergleichung der Gleichungen (9.) und (28.) für die zehn Grössen $a_1, b_1, \ldots, e_1''$ durch die Quadrate $C_5^2, C_0^2, \ldots, C_2^2$ der Nullwerthe der transformirten Thetafunctionen; der Factor g bleibt dabei ungeändert. Giebt man demnach in den Relationen (25.) der willkürlichen Grösse δ den Werth $\sqrt{g}$, so besteht zwischen den aus den hyperelliptischen Gebilden $\xi^2 = R(x)$ und $\eta^2 = R_1(y)$ hervorgehenden Doppelintegralen die Gleichung

$$(24.) \quad \int_0^{\alpha_3} dx_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx_1 \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} = \int_0^{\beta_3} dy_2 \int_{\beta_2}^{\beta_1} dy_1 \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{R_1(y_1)}\sqrt{R_1(y_2)}},$$

wenn die Werthe, für welche $R(x)$ und $R_1(y)$ verschwinden, aus den Relationen

$$\alpha_0 = \frac{b'ac}{\Delta}, \quad \alpha_1 = \frac{cc'e'}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{e'ac''}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{c''c'b'}{\Delta},$$

$$\beta_0 = \frac{b_1'a_1c_1}{\Delta_1}, \quad \beta_1 = \frac{c_1c_1'e_1'}{\Delta_1}, \quad \beta_2 = \frac{e_1'a_1c_1''}{\Delta_1}, \quad \beta_3 = \frac{c_1''c_1'b_1'}{\Delta_1}$$

bestimmt werden. Da unter den Grössen $a, b, \ldots, e'', a_1, b_1, \ldots, e_1''$ analoge Beziehungen stattfinden müssen wie unter den Quadraten der Nullwerthe der Thetafunctionen, so folgt aus der Bemerkung am Schlusse des ersten Paragraphen, dass die Ungleichungen

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0, \quad \beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0$$

bestehen.

Nach dem von *Borchardt* aufgestellten Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier positiven Elementen a, b, c, e sind nun vier neue Grössen a_2, b_2, c_2, e_2 ebenso aus den vier Grössen a_1, b_1, c_1, e_1 zu bilden, wie diese selbst aus den vier Grössen a, b, c, e gebildet sind, u. s. f. in infinitum. Bestimmt man dann, wie vorher, die ϑ-Functionen und die Constante g so, dass $a = gc_5^2$, $b = gc_0^2$, $c = gc_{12}^2$, $e = gc_{34}^2$ ist, so findet man durch wiederholte Anwendung der vorhergehenden Schlüsse

$$a_n = g\vartheta_5^2\,(0,0;2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}),\quad b_n = g\vartheta_0^2\,(0,0;2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}),$$
$$c_n = g\vartheta_{12}^2(0,0;2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22}),\quad e_n = g\vartheta_{34}^2(0,0;2^n\tau_{11},2^n\tau_{12},2^n\tau_{22});$$

mithin wird, da der gemeinsame Grenzwerth der Nullwerthe der ϑ-Functionen auf den rechten Seiten für $n=\infty$ sich gleich Eins ergeben hat,

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \lim_{n=\infty} c_n = \lim_{n=\infty} e_n = g.$$

Diese gemeinsame Grenze g, der sich, wenn n in das Unendliche wächst, die vier Elemente a_n, b_n, c_n, e_n nähern, heisst *das arithmetisch-geometrische Mittel der vier Elemente* a, b, c, e.

Setzt man demnach in der Gleichung (26.) $\delta = \sqrt{g}$, so wird der reciproke Werth dieses Mittels g durch die Gleichung

$$\text{(29.)}\qquad \int_0^{\alpha_3} dx_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx_1 \frac{x_1-x_2}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} = \frac{\pi^2}{g}$$

bestimmt, wobei in der ganzen rationalen Function

$$R(x) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)x$$

die Grössen α_0, α_1, α_2, α_3 aus den Gleichungen

$$\alpha_0 = \frac{b'ac}{\Delta},\quad \alpha_1 = \frac{cc'e'}{\Delta},\quad \alpha_2 = \frac{e'ac''}{\Delta},\quad \alpha_3 = \frac{c''c'b'}{\Delta},$$
$$\Delta = (abceb'c'e'b''c''e'')^{\frac{1}{4}}$$

zu berechnen sind. Die Gleichung (29.) kann nach (16.) auch in der Form

$$g = \frac{\pi^2}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}$$

geschrieben werden, falls in den Gleichungen (1.) $a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{21}=0$, $a_{22}=1$ gesetzt wird; sie liefert die Darstellung des arithmetisch-geometrischen Mittels g aus vier Elementen durch die Determinante von vier reellen Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung $\int \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{R(x)}}$ $(\lambda = 0, 1)$

genau in der Form, welche *Borchardt* in seiner ersten Veröffentlichung über jenes Mittel angegeben hat.

5.

In dem vorher von der Betrachtung ausgeschlossenen Grenzfalle, in welchem

$$ae-bc = 0$$

ist, gehen die hyperelliptischen Integrale erster Gattung in elliptische Integrale erster und dritter Gattung über, und das Doppelintegral, welches in dem allgemeinen Falle den reciproken Werth des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen darstellt, reducirt sich auf ein Product zweier vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung.

Eliminirt man aus den Gleichungen (28.), die den Algorithmus des Mittels aus vier Elementen definiren, mit Hülfe der Gleichung $ae-bc=0$ das Element a, so folgt

$$a_1 = \frac{1}{4e}(b+e)(c+e)$$

und

$$(30.)\qquad \begin{cases} b_1 = \frac{1}{2}(b+e)\sqrt{\frac{c}{e}}, \\ c_1 = \frac{1}{2}(c+e)\sqrt{\frac{b}{e}}, \\ e_1 = \sqrt{bc}. \end{cases}$$

Die durch die Relationen (27.) eingeführten Hülfsgrössen $b', c', e', b'', c'', e''$ werden in diesem Specialfalle

$$b' = \frac{c}{e}\sqrt{b^2-e^2},\quad c' = \frac{b}{e}\sqrt{c^2-e^2},\quad e' = \frac{1}{e}\sqrt{b^2-e^2}\sqrt{c^2-e^2},$$

$$b'' = \sqrt{b^2-e^2},\qquad c'' = \sqrt{c^2-e^2},\qquad e'' = 0,$$

wobei allen Quadratwurzeln der positive Werth beizulegen ist. Die neuen Elemente a_1, b_1, c_1, e_1 genügen wieder der Ungleichung

$$a_1 > b_1 > c_1 > e_1 > 0$$

und der Gleichung

$$a_1 e_1 - b_1 c_1 = 0.$$

Die drei Gleichungen (30.) definiren, wiederholt angewandt, einen Algorithmus

dreier positiven Elemente b, c, e, den *K. Schering* bereits betrachtet hat*). Bildet man nämlich drei neue Elemente b_2, c_2, e_2 ebenso aus b_1, c_1, e_1, wie diese aus b, c, e gebildet sind, u. s. f., so nähern sich wieder b_n, c_n, e_n, wenn n in das Unendliche wächst, einem gemeinsamen Grenzwerth, der mit g' bezeichnet werden möge. Die Berechnung des von *K. Schering* als arithmetisch-geometrisches Mittel aus drei Elementen bezeichneten Grenzwerthes, der aus dem Mittel von vier Elementen hervorgeht, wenn die beiden letzten Elemente einander gleich werden, lässt sich gleichfalls auf die Ermittelung dieser Grösse g' zurückführen**).

Es werde jetzt in den Gleichungen (1.) wieder $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, also

$$\omega_{11} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \omega_{21} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$
$$\omega_{12} = \int_{\alpha_3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \omega_{22} = \int_{\alpha_3}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

gesetzt; um dann in dem Grenzfalle $ae-bc = 0$ den Werth des Doppelintegrals, welches nach (16.) mit der Determinante $\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}$ identisch ist, zu ermitteln, mögen für x_1 und x_2 neue Veränderliche ξ_1 und ξ_2 durch die Substitutionen

$$x_1 = \alpha_1-(\alpha_1-\alpha_2)\xi_1, \quad x_2 = \alpha_3\xi_2$$

eingeführt werden, so dass die Grenzen der transformirten Integrale bei dem Grenzübergange constant bleiben. Dann ergiebt sich

$$\lim_{ae-bc=0}(\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}) = \frac{e}{bc}\int_0^1 d\xi_2 \int_0^1 d\xi_1 \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{R}(\xi_1)}\sqrt{\mathfrak{R}_1(\xi_2)}},$$

wobei

$$\mathfrak{R}(\xi) = \xi(1-\xi)\Big(1-\Big(1-\frac{e^2}{b^2}\Big)\xi\Big),$$
$$\mathfrak{R}_1(\xi) = \xi(1-\xi)\Big(1-\Big(1-\frac{e^2}{c^2}\Big)\xi\Big)$$

gesetzt ist. In den Integralen ω_{11} und ω_{21} hat $\sqrt{R(x)}$ den reellen negativen Werth zu erhalten, während allen übrigen Quadratwurzeln ihr positiver

*) Dieses Journal, Bd. 85 S. 117.

**) Daselbst, S. 128 und S. 155.

Werth beizulegen ist. Aus der Gleichung (29.) folgt demnach

$$\frac{\pi^2}{g'} = \frac{e}{bc}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\Re(\xi)}}\cdot\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\Re_1(\xi)}}$$

$$= 4e\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi+e^2\sin^2\varphi}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{c^2\cos^2\varphi+e^2\sin^2\varphi}}.$$

Die Moduln der beiden vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung, auf deren Product sich in diesem Grenzfalle die aus den vier vollständigen reellen hyperelliptischen Integralen erster Gattung gebildete Determinante reducirt, sind von einander verschieden.

Etwas einfacher noch gestaltet sich der Grenzübergang, wenn man von dem Ausdrucke für $\frac{\pi^2}{g}$, welchen *Borchardt* in seiner zweiten Veröffentlichung*) über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen angegeben hat, ausgeht.

Bezeichnet man nun das gewöhnliche arithmetisch-geometrische Mittel der beiden Elemente α und β mit $M(\alpha, \beta)$, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung

$$g' = \frac{1}{e}M(b, e).M(c, e),$$

was mit dem von *K. Schering* gefundenen Resultate übereinstimmt**). Besteht demnach zwischen den vier positiven Grössen a, b, c, e die Relation $ae-bc = 0$, so geht das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen in ein Product zweier arithmetisch-geometrischen Mittel je zweier Elemente über.

---

*) l. c., S. 96 resp. S. 431.

**) Dieses Journal, Bd. 85 S. 119.

Geometrische Untersuchungen.

(Von Herrn *Hermann Schmidt* in Stuttgart.)

Erster Abschnitt.

Die Axiome der Geometrie.

Einleitung.

Im Folgenden unternehme ich den Versuch, die Axiome von der Ebene und von der Geraden zu beweisen. Vielleicht ist es erwünscht, wenn ich zunächst hier einleitend eine kurze Uebersicht über den Gang, den meine Untersuchung nimmt, gebe. Es ist schon früher erkannt worden, dass die Kugel so definirbar ist, dass die Möglichkeit ihrer Existenz keinem Zweifel unterliegt. Von ihr nimmt denn auch meine Untersuchung ihren Ausgang. Aus der Entstehung der Kugelfläche folgt, dass sie beliebig über sich selbst wegbewegt werden kann, ohne mit sich ausser Deckung zu kommen, und aus dieser Eigenschaft lässt sich die ganze Sphärik ableiten und zwar, wie ich in einem zweiten, analytischen Abschnitt zeigen werde, auch die sphärische Trigonometrie in ihrem vollen Umfange, so dass also die ganze Sphärik aus sich selbst heraus sich entwickeln lässt unabhängig von den beiden Axiomen von der Ebene und von der Geraden.

Ich gebe jedoch von Anfang an dieser Untersuchung noch eine grössere Allgemeinheit. Ich nenne nämlich Hauptfläche eine Fläche von der Art, dass sie beliebig über sich selbst wegbewegt werden kann, ohne mit sich ausser Deckung zu kommen (derart, dass ein beliebiges Gebilde auf ihr, AB, in eine beliebige andere Lage AB' oder $A'B'$ auf der Fläche gebracht werden kann). In der Euklidischen Geometrie giebt es, wie ich einschaltend bemerken möchte, ausser der Kugelfläche nur noch *eine* Hauptfläche, die Ebene. Für unsere nachfolgende Untersuchung steht indessen zunächst nur fest, dass die Kugelfläche eine Hauptfläche ist; ob es ausser ihr noch andere geschlossene Hauptflächen, ob es daneben auch unbegrenzte

Hauptflächen giebt, bleibt bis auf weiteres dahingestellt. Unsere Untersuchung hat also vorläufig einen theilweise hypothetischen Charakter; sobald wir aber finden, dass es ausser der Kugelfläche noch andere Hauptflächen giebt, erhalten für diese auch die Eigenschaften, die wir von der Hauptfläche bewiesen haben, sofort Geltung. Die Hauptfrage wird alsdann durch folgenden Satz entschieden, den ich später beweisen werde: Wenn von zwei Kreisen, die zwei Punkte gemein haben und fest mit einander verbunden gedacht werden, der eine in sich verschoben wird, so beschreibt der andere eine Hauptfläche (bezw. ein Stück einer solchen), die auch dadurch entsteht, dass man den zweiten Kreis in sich selbst verschiebt, wobei der erste die Fläche beschreibt. Wählt man als den einen dieser beiden Kreise einen Hauptkreis einer Kugelfläche, als den anderen aber einen Kreis, der mit diesem Hauptkreis zwei Punkte gemein hat und überdies durch den Mittelpunkt der Kugelfläche geht, so ist die durch die beiden Kreise erzeugte Fläche eine Ebene. Die Eigenschaften der Ebene und der Geraden als der Schnittlinie zweier Ebenen ergeben sich alsdann aus dem, was zuvor über unbegrenzte Hauptflächen hypothetisch bewiesen worden ist, ganz von selbst.

Ich gehe aber noch einen Schritt weiter. Hauptflächen, welche keine Ebene sind, kann man gekrümmt nennen: sie haben die Eigenschaft, dass sie keine Linie enthalten, die bei der Drehung um zwei ihrer Punkte ihre Lage beibehält. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass durch eine und dieselbe gekrümmte Hauptlinie (Hauptlinie nenne ich die Schnittlinie zweier Hauptflächen, gekrümmt nenne ich eine Hauptlinie, die keine Gerade ist) nicht mehr als zwei congruente Hauptflächen gehen können. Man kann nun, wie es zu jeder Kugelfläche concentrische Kugelflächen giebt, auch zu jeder anderen Hauptfläche beliebig viele weitere Hauptflächen annehmen, die während man jene erste über sich selbst weggleiten lässt, ebenfalls, wenn eine starre Verbindung zwischen den Flächen angenommen wird, über sich selbst weggleiten; solche Hauptflächen nenne ich parallel zu einander. Nun behaupte ich, dass zwei parallele gekrümmte Hauptflächen einander nicht congruent sein können. Dass dieser Satz für geschlossene Hauptflächen (Kugelflächen) gilt, ist klar; dass er aber auch für gekrümmte unbegrenzte Hauptflächen gilt, falls es solche giebt, beweise ich wie folgt: Es seien α und β zwei parallele, unbegrenzte und gekrümmte Hauptflächen, so erhält man offenbar, wenn man den Raum $\alpha\beta$ so fortbewegt, dass α auf



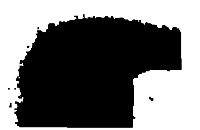
β kommt, eine durch die neue Lage von β bestimmte Hauptfläche γ, die congruent den Flächen α und β ist, und durch Fortsetzung jenes Verfahrens gelangt man zu Hauptflächen δ, ε, ..., die sämmtlich congruent der Fläche α sind; dabei sind die Räume $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, ... ebenfalls einander congruent. Nimmt man nunmehr auf der α zwei Punkte A und B nach Belieben an und dreht um diese die α, bis sie, was immer möglich, die β in irgend einer Hauptlinie $\overline{\alpha\beta}$, die jedenfalls gekrümmt sein muss, schneidet, so lässt sich, wie später des näheren gezeigt werden wird, auf der β ein Punktepaar $A'B'$ bestimmen, das auf der β zu der Linie $\overline{\alpha\beta}$ dieselbe Lage hat, wie AB ebenfalls zu der Linie $\overline{\alpha\beta}$ auf der α. Dreht man um diese Punkte $A'B'$ die β ebensoweit gegen die γ, wie vorher die α gegen die β, wobei die α, die wir jetzt als starr verbunden mit der β denken, mitgeführt wird, so erhalten wir eine Schnittlinie $\overline{\beta\gamma}$, durch welche auch die α gehen muss; wir hätten also drei und, wenn das Verfahren fortgesetzt wird, beliebig viele einander congruente, gekrümmte Hauptflächen, die alle durch eine und dieselbe gekrümmte Hauptlinie gehen müssten im Widerspruch mit dem, was vorher bewiesen wurde (lässt man die Räume $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, ... immer kleiner werden, bis man schliesslich zu einer stetigen Aufeinanderfolge der Hauptflächen α, β, γ, δ, ε, ..., kommt, so müsste, wenn diese Hauptflächen einander congruent wären, offenbar eine gekrümmte Hauptfläche um eine in ihr liegende, gekrümmte Hauptlinie derart gedreht werden können, dass die letztere ihre Lage im Raume beibehielte, was unmöglich ist). Auf diesen Satz aber lässt sich, wenn er als zutreffend erachtet wird, der Nachweis eines Widerspruchs in der sogenannten imaginären oder absoluten (nicht-euklidischen) Geometrie gründen. Denn die „Grenzfläche" in dem von *Lobatschewsky*, *Bolyai* u. a. entwickelten Geometriesystem (von *Bolyai* Fläche F genannt) ist in der That eine gekrümmte Hauptfläche, die congruent sein müsste ihren Parallelflächen, da diese, wie aus der Annahme jener Mathematiker folgt, ebenfalls sämmtlich Grenzflächen wären. (In der von *Frischauf* herausgegebenen Bearbeitung der absoluten Geometrie nach *J. Bolyai*, Leipzig 1872, ist auf Seite 28 in der That bemerkt: Alle Grenzlinien sind congruent. Hieraus folgt aber vermöge der dort gegebenen Definition der Grenzfläche, welch letztere dadurch entsteht, dass eine Grenzlinie um eine ihrer Axen gedreht wird — Seite 29 unten —, dass auch alle Grenzflächen einander congruent sind. Ebenso wird dort bewiesen,

dass, wenn man auf den Axen AA', BB', ... einer Grenzfläche AB.. gleiche Stücke $AA' = BB'$, ... abschneidet, auch die Punkte A', B' auf einer Grenzfläche liegen, woraus hervorgeht, dass zwei so liegende Grenzflächen einander parallel sein müssten in dem von mir angenommenen Sinne. Durch eine Gerade als Axe und einen auf ihr liegenden Punkt ist eine Grenzfläche, die durch diesen Punkt geht, vollkommen bestimmt; verschiebt man also die Axe in sich selbst, so erhält man eine stetige Aufeinanderfolge von Grenzflächen, d. h. von gekrümmten, einander congruenten Flächen, welche die Eigenschaften besitzen, die ich von der Hauptfläche annehme.) Wie sich aus jenem von mir aufgestellten Satze ein directer Beweis des Euklidischen Parallelenaxioms ableiten lässt, der uns nicht zwingt, die Entwickelung einer auf dieses Axiom Verzicht leistenden Geometrie bis zur Grenzfläche zu verfolgen, davon wird im Nachstehenden noch die Rede sein; in diesen einleitenden Bemerkungen wollte ich nur kurz den Hauptinhalt meiner Untersuchungen andeuten. Uebrigens bemerke ich hier, dass ich der imaginären Geometrie keineswegs ihre Berechtigung absprechen will: nur den ihr gebührenden Platz möchte ich ihr anweisen als einer Geometrie der imaginären Hauptfläche neben der Geometrie der Kugelfläche und der (Euklidischen) Geometrie der Ebene. Ich werde denn auch im zweiten Abschnitt dieser Untersuchungen ebenso wie die Sphärik die Geometrie der imaginären Hauptfläche aus sich heraus entwickeln, unabhängig von ebenen oder geradlinigen Constructionen, wie sie in den bisherigen Darstellungen der imaginären Geometrie zur Anwendung gelangt sind. Man erhält hiernach drei Geometriesysteme, die gleichberechtigt neben einander stehen, jedes vollständig unabhängig von den beiden anderen, nämlich die Geometrie der Ebene, diejenige der Kugelfläche und diejenige der imaginären Hauptfläche.

Bevor ich daran gehe, das was ich hier kurz angedeutet, eingehend zu begründen, bemerke ich noch, dass ich die allgemeinen Grundbegriffe der Raumlehre, die Definitionen von Raum, Körper, Fläche, Linie, sowie den Begriff der Congruenz ohne Weiteres voraussetze, da über sie ein Zweifel nicht besteht.

Kugelfläche und Hauptfläche im Allgemeinen.

1) *Satz* und *Erklärung*. Wird eine Linie OA, durch welche die beiden Punkte O und A starr verbunden sind, um den einen ihrer End-



punkte, O, gedreht, so entsteht als Weg des anderen, A, zunächst eine Linie und bei Fortsetzung der Drehung eine Fläche, die schliesslich einen Körper von der Beschaffenheit umgrenzt, dass er bei beliebiger Drehung um A immer mit sich in Deckung bleibt. Die Grenze dieses Körpers, die eine in sich selbst zurückkehrende, geschlossene Fläche bildet, muss ebenfalls wie der Körper selbst bei beliebiger Drehung um A mit sich in Deckung bleiben, kann also beliebig über sich selbst wegbewegt werden, so dass ein Gebilde auf ihr, AB, in eine beliebige andere Lage AB' oder $A'B'$ gebracht werden kann. Diese Fläche heisst *Kugelfläche,* der von ihr umgrenzte Raum *Kugel.* Der Punkt O heisst Mittelpunkt, Centrum, $OA (= OB = OA' = OB')$ Halbmesser, Radius der Kugel oder Kugelfläche.

Zusatz 1). Die Kugelfläche kann sich nicht selbst schneiden, da sonst, wenn sie über sich selbst wegbewegt würde, die Schnittfigur aus ihrer Lage sich bewegen müsste, die Fläche selbst also ausser Deckung mit sich käme; noch weniger kann die Kugelfläche aus mehreren nicht zusammenhängenden Stücken bestehen.

Zusatz 2). Der Mittelpunkt der Kugelfläche ist von ihr umschlossen.

2) *Erklärung.* Eine Fläche von der Beschaffenheit, dass sie beliebig über sich selbst wegbewegt werden kann, ohne mit sich ausser Deckung zu kommen, so dass also ein Gebilde auf ihr, AB, in eine beliebige andere Lage, AB' oder $A'B'$, gebracht werden kann, heisst *Hauptfläche.*

Anmerkung. Alle Kugelflächen sind Hauptflächen. Ob es noch andere Hauptflächen giebt, lassen wir vorläufig dahingestellt.

Zusatz. Von der Hauptfläche gilt dasselbe, was in 1) Zusatz 1 von der Kugelfläche gesagt ist.

3) *Lehrsatz.* Zwei Hauptflächen, die verschieden sind, können kein Flächenstück gemein haben.

Beweis. Hätten sie ein Flächenstück gemein, so gäbe es eine Linie, welche die Grenze wäre zwischen den gemeinsamen und den nicht gemeinsamen Theilen der beiden Hauptflächen. Liesse man aber beide über sich selbst weggleiten, so dass jenes gemeinsame Flächenstück über seinen Rand hinaus rückte, so würde es, als beiden Hauptflächen angehörig, beide beschreiben. Die Flächen hätten also, statt des anfänglich angenommenen, ein anderes, grösseres Flächenstück gemein, was einen Widerspruch bildet.

4) *Lehrsatz.* Wenn mit einer Hauptfläche α ein Punkt B starr verbunden ist, so wird letzterer, während man die α beliebig über sich selbst

wegbewegt, im Allgemeinen sich ebenfalls bewegen und zwar derart, dass er wieder eine Hauptfläche beschreibt.

Beweis. Wenn die α so über sich selbst wegbewegt wird, dass eine Linie AA' auf ihr ein Flächenstück beschreibt (wobei die Linie AA' auch so geführt werden kann, dass Punkt A über A' weggeht), und es würde in diesem Falle der Punkt B still stehen bleiben, so müsste offenbar die α mit einer um B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $OA = OA'$ beschriebenen Kugelfläche jenes Flächenstück gemein haben und demnach mit dieser Kugelfläche zusammenfallen, d. h. α wäre eine Kugelfläche und B ihr Mittelpunkt. In jedem anderen Falle muss B bei jener Bewegung der α sich ebenfalls bewegen und zunächst eine Linie, diese Linie aber wird bei fortgesetzter Bewegung der α eine Fläche β beschreiben, die nothwendig ebenso wie die α beliebig über sich muss wegbewegt werden können, ohne mit sich ausser Deckung zu kommen.

Zusatz 1). Umgekehrt muss, wenn die β über sich selbst wegbewegt wird, auch die α sich über sich selbst wegbewegen. Zwei Hauptflächen, die in vorgedachter Weise zu einander liegen, heissen ***parallel.*** Parallele Kugelflächen heissen auch ***concentrisch.***

Zusatz 2). Parallele Hauptflächen (concentrische Kugelflächen) können keinen Punkt gemein haben.

Zusatz 3). Sind mehrere Hauptflächen einer und derselben parallel, so sind sie unter einander parallel.

Zusatz 4). Sind zwei nicht parallele Hauptflächen α und β gegeben, so lassen sich zu der einen, α, beliebig viele Parallelflächen denken, welche die β schneiden. Denn unter allen Parallelflächen der α, welche durch beliebige Punkte der β gehen, können höchstens zwei sein, welche die β berühren; jede dritte, die zwischen diesen zweien liegt, muss die β schneiden, da sonst, wenn sie die β berühren würde, letztere nach der Berührungsfigur sich schneiden müsste. Ebenso lassen sich um einen Punkt A beliebig viele Kugelflächen beschreiben, welche eine gegebene Hauptfläche β, für die A nicht Mittelpunkt ist, schneiden, und höchstens zwei von den Kugelflächen, die um A sich beschreiben lassen, können die β berühren.

Zusatz 5). Eine Kugelfläche α kann nur ***einen*** Mittelpunkt haben. Denn hätte sie zwei Mittelpunkte A und B, so liessen sich um diese beiden zwei Systeme von Kugelflächen beschreiben, welche der α und folglich auch unter einander parallel wären; aber wenn man beispielsweise um A

mit AB und um B mit BA Kugelflächen beschreibt, so sind diese nicht parallel, sondern müssen sich schneiden.

5) ***Satz*** und ***Erklärung***. Wenn auf einer Hauptfläche α eine Linie AB gegeben ist, so kann letztere um den einen ihrer Endpunkte, A, auf der Fläche gedreht werden. Dabei beschreibt der andere Endpunkt B im Allgemeinen eine in sich zurückkehrende, geschlossene Linie, welche die Eigenschaft besitzt, dass sie in sich selbst verschoben werden kann, ohne mit sich ausser Deckung zu kommen. Diese Linie kann auch betrachtet werden als Schnittlinie oder gemeinsame Linie einer um A beschriebenen Kugelfläche und der gegebenen Hauptfläche. Der Fall, dass B keine Linie beschreibt, kann nur dann vorkommen, wenn die um A mit AB beschriebene Kugelfläche die α nicht schneidet sondern in einem oder einigen Punkten berührt. Ob dieser Fall eintreten kann, ob ferner zwei Hauptflächen ausser einer Schnittlinie oder einer gemeinsamen Linie noch weitere Gebilde gemein haben können, lassen wir vorerst dahingestellt. Die um A als Mittelpunkt mit der AB auf der α beschriebene Linie heisst ***Kreis*** oder ***Kreislinie***, der von ihr umschlossene Flächenraum, in welchem der Punkt A liegt, heisst ***Kreisfläche***, A ist Mittelpunkt, Centrum, AB Halbmesser, Radius des Kreises oder der Kreisfläche.

6) ***Lehrsatz***. Wenn der Raum um zwei ruhende Punkte, A und B, gedreht wird, so beschreiben die übrigen Punkte des Raumes im Allgemeinen geschlossene, in sich selbst verschiebbare Linien, nämlich die Schnittlinien, bzw. gemeinsamen Linien (Kreise) der beiden zu A und B gehörigen Systeme concentrischer Kugelflächen. Wenn ein Punkt, durch welchen eine solche Linie geht, diese beschreibt, so müssen auch alle übrigen Punkte des Raumes gleichzeitig und gleichmässig ihre Linien beschreiben, und nur solche Punkte des Raumes stehen bei der Drehung still, durch welche derartige Linien nicht gehen. Die bei der Drehung stillstehenden Punkte können höchstens eine oder einige Linien, nicht aber eine Fläche oder ein Flächenstück erfüllen.

Beweis. Nach 4) Zusatz 4 giebt es unendlich viele Kugelflächen um A und um B von der Art, dass je eine Fläche des einen Systemes mit beliebig vielen Flächen des anderen Systemes Schnittlinien oder gemeinsame Linien bildet. Demnach giebt es auch unendlich viele Punkte, durch welche solche Linien gehen. Es ist aber klar, dass bei der vorausgesetzten Drehung des Raumes die Punkte desselben, wenn sie sich bewegen, in jenen Linien

hat und an seinen alten Ort zurückgekehrt ist, letzteres auch für alle anderen Punkte des Raumes der Fall sein muss. Die Bewegung muss also in geschlossenen, in sich selbst verschiebbaren Linien und gleichmässig erfolgen, derart, dass, wenn ein Punkt C z. B. nach einander die Strecken $CC' = C'C'' = C''C'''$ ... durchläuft, auch ein anderer Punkt D entsprechende Strecken $DD' = D'D'' = D''D'''$ ... durchlaufen muss.

Würde bei der Drehung des Raumes um A und B ein Flächenstück still stehen, so liesse sich offenbar um A oder B eine Kugelfläche beschreiben, welche mit dem Flächenstück eine Linie gemein hätte, das also bei der Drehung des Raumes still stehen müsste im Widerspruch mit dem oben Bewiesenen.

Anmerkung. Wenn die Punkte, die bei der Drehung des Raumes um AB still stehen, wirklich eine Linie erfüllen, so muss diese die Eigenschaft haben, dass sie in sich selbst verschiebbar ist. Denn sie bleibt still stehen, mag der Raum um beliebige zwei ihrer Punkte gedreht werden: sie muss also auch mit sich in Deckung bleiben, wenn sie in eine beliebige neue Lage gebracht wird, so dass die zwei Punkte A und B auf zwei andere Punkte A' und B' dieser Linie fallen. Wir lassen übrigens vorläufig dahin gestellt, ob es eine solche Linie giebt.

Zusatz. Um drei Punkte A, B, C kann der Raum nicht gedreht werden, es sei denn, dass sie eine ganz bestimmte aus Satz 6 sich ergebende Lage zu einander haben.

7) *Lehrsatz* und *Erklärung.* Jede Linie a, die zwei Hauptflächen α und β gemein haben, lässt sich in sich selbst verschieben. Eine solche Linie nennen wir *Hauptlinie* (für den Kreis und die gemeinsame Linie zweier Kugelflächen ist diese Eigenschaft schon in Satz 6 nachgewiesen)

Beweis. Ist die Linie a von der in 6) Anmerkung gedachten Beschaffenheit, so ist sie auch, wie dort gezeigt, in sich verschiebbar. Läss sich aber der Raum nicht so um die a drehen, dass sie selbst still steht so nehme man zwei beliebige Punkte A und B auf ihr an, dann kann, wenn diese festgehalten werden, der ganze Raum nicht mehr bewegt werden ohne dass die a und damit auch die ganze von der α und β gebildete Figur aus ihrer Lage kommt. Wir können aber beide Hauptflächen so über sich selbst wegbewegen, dass die Punkte A und B mit zwei anderen, A' und B', der a zusammenfallen, dann aber fällt nothwendig die ganze neue Lage der a mit der vorherigen Lage zusammen. Da aber A' und B' beliebig

gewählt werden können (sofern nur die dadurch begrenzte Strecke der AB gleich ist), so muss nothwendig die a in sich selbst verschoben werden können.

8) *Lehrsatz.* Entlang zwei Hauptflächen, die nicht parallel sind, kann der Raum bewegt werden. Dabei bewegen sich die gegebenen sowie sämmtliche Parallelflächen zu ihnen entlang von Hauptlinien, deren jede zwei Hauptflächen gemein ist, die den beiden durch die gegebenen Hauptflächen bestimmten Systemen von Parallelflächen angehören. Die Punkte des Raumes beschreiben im Allgemeinen Hauptlinien, nämlich die Schnitt- oder gemeinsamen Linien der zu den beiden gegebenen parallelen Hauptflächen, und nur Punkte, durch welche keine solche Linien gehen, können bei der Drehung des Raumes still stehen. Die etwa still stehenden Punkte können höchstens eine oder einige Linien, aber kein Flächenstück erfüllen. (Statt einer der Hauptflächen kann auch ein Punkt gegeben sein.)

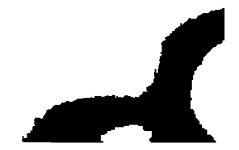
Der *Beweis* dieses Satzes ist derselbe wie bei 6).

Anmerkung 1). *Erklärung.* Hauptlinien, die eine Hauptfläche mit einem Systeme paralleler Hauptflächen gemein hat, heissen *parallel;* sie können keinen Punkt gemein haben.

Anmerkung 2). Es ist mir vielleicht gestattet, darauf hinzuweisen, wie das Gesetz der Reciprocität, das die ganze Raumlehre beherrscht, schon hier zu Tage tritt: Der Bewegung des Raumes um einen Punkt entspricht die Bewegung desselben entlang einer Hauptfläche; der Bewegung des Raumes um zwei Punkte entspricht die Bewegung desselben entlang zwei nicht parallelen Hauptflächen. Durch drei Punkte oder durch drei Hauptflächen ist der Raum im Allgemeinen in seiner Lage festgehalten.

9) *Lehrsatz.* Zwei Hauptflächen können ausser einer Hauptlinie keinen Punkt (noch weniger eine Linie oder ein anderes Gebilde) gemein haben.

Beweis. Erster Fall. Es lassen sich auf der gegebenen, beiden Hauptflächen gemeinsamen Hauptlinie drei Punkte A, B und C so bestimmen, dass wenn sie sämmtlich festgehalten werden, der Raum nicht mehr bewegt werden kann. Dann ist klar, dass eine Hauptfläche, die durch diese drei Punkte geht, ebenfalls nicht mehr aus ihrer Lage bewegt werden kann, wenn die drei Punkte still stehen. Man kann aber beide Flächen über sich selbst wegbewegen, und dies ist die einzige Bewegung, die ihnen noch frei steht. Dann aber würde, wenn sie ausser der Linie noch einen Punkt



gemein hätten, dieser eine beiden Flächen gemeinsame Linie und diese Linie würde bei Fortsetzung der Bewegung beide Flächen beschreiben, d. h. beide müssten zusammenfallen.

Zweiter Fall. Auf der gemeinsamen Hauptlinie AC lassen sich keine drei Punkte der gedachten Art finden: dann behaupte ich, dass dieselbe auf keiner der beiden Flächen einen begrenzten Raum einschliessen, also nicht geschlossen sein kann. Denn wäre sie geschlossen, so könnte man die eine der beiden Flächen so über sich selbst wegbewegen, dass die AC auf ihr um einen ihrer Punkte A sich drehen würde, wobei die verschiedenen Lagen, die sie nach einander einnimmt, je mindestens zwei Punkte mit einander gemein hätten, z. B. die erste mit der zweiten die Punkte A und B, die erste mit der dritten A und B' u. s. f. Wenn also der Voraussetzung gemäss die AC bei der Drehung um A und C nicht aus ihrer Lage sich bewegt, so ist die erste und damit auch die zweite Lage zwischen A und B unverrückbar, ebenso die zweite und dritte zwischen A und B' u. s. w. Hieraus folgt, dass die ganze von der AC bei ihrer Fortbewegung beschriebene Fläche bei ihrer Drehung um die Punkte A und C still stehen müsste, gegen die Voraussetzung bezw. gegen das in 6) Bewiesene. Wenn aber die AC auf keiner der beiden gegebenen Hauptflächen einen begrenzten Raum einschliessen kann, so können die beiden Flächen offenbar selbst nicht geschlossen, sondern müssen unbegrenzt sein. Hätten sie nun ausser der gegebenen Hauptlinie noch einen Punkt D gemein, so beschreibe man um einen beliebigen Punkt C der AC mit dem Halbmesser CD eine Kugelfläche, welche die beiden (unbegrenzten) Hauptflächen nach Kreisen schneiden muss, die ihrerseits wieder von der unbegrenzten, durch ihren Mittelpunkt C gehenden Linie AC in mindestens zwei Punkten geschnitten werden müssen; diese Punkte seien A und B. Nun können, nach dem eben Bewiesenen, die Punkte A, B, D, die den beiden gegebenen Hauptflächen gemeinsam sind, jedenfalls nicht von der Art sein, dass der Raum um sie gedreht werden kann, da sie auf der einen wie auf der anderen Fläche Kreislinien angehören. Wird also der Raum in diesen drei Punkten festgehalten, so können auch die beiden Hauptflächen sich nicht bewegen; da sie aber die Hauptlinie ABC gemein haben, die jedenfalls nicht mit der durch A, B, D bestimmten gemeinsamen Hauptlinie der beiden Flächen zusammenfällt (falls überhaupt durch die Punkte A, B, D eine gemeinsame Linie der beiden Flächen bestimmt ist und diese nicht

etwa nur Berührungspunkte bilden sollten), so folgt wie im ersten Falle, dass beide Flächen zusammenfallen müssen.

Zusatz 1). Es ist nach dem Bisherigen noch nicht erwiesen, ob es Hauptlinien giebt, die bei der Drehung des Raumes um zwei ihrer Punkte still stehen. Wir wollen aber doch der Kürze halber für eine solche Hauptlinie, da ihre Möglichkeit im Folgenden hin und wieder angenommen werden muss, die Bezeichnung „*Gerade*" einführen. Zwei Hauptflächen, die eine Gerade enthalten, sind congruent. Denn bringt man sie in eine solche Lage, dass sie die Gerade gemein haben, und dreht dann die eine um diese Gerade, so wird sie, bis sie in die alte Lage zurückkommt, nothwendig durch die andere Fläche durchgehen und hierbei mindestens einen Punkt ausser der angenommenen Geraden mit ihr gemein haben, also mit ihr zusammenfallen. Diese Fläche heisst *Ebene*. Giebt es eine Ebene, so giebt es auch eine Gerade; es folgt ferner ohne weiteres aus dem Bisherigen, dass durch zwei Punkte einer Ebene immer eine Gerade und nur *eine* möglich ist, und dass diese ganz in der Ebene liegt.

Zusatz 2). *Erklärung.* Eine Hauptfläche, die keine Ebene ist, und eine Hauptlinie, die keine Gerade ist, heissen gekrümmt.

10) *Lehrsatz.* Zwei Hauptflächen, die eine Hauptlinie gemein haben, schneiden sich nach derselben; berühren können sich zwei Hauptflächen nur in *einem* Punkte.

Beweis. Wenn zwei Hauptflächen α und β eine Hauptlinie a als berührende gemein hätten, so würden sich zu der einen derselben Parallelflächen beschreiben lassen, die von der anderen nach zwei der a parallelen Hauptlinien geschnitten würden. Wenn zwei Hauptflächen sich in zwei Punkten berühren würden, so könnten wiederum zu der einen derselben Parallelflächen beschrieben werden, welche von der anderen nach zwei Hauptlinien geschnitten werden müssten (und zwar nach Kreisen, deren Mittelpunkte die angenommenen Berührungspunkte wären). Noch weniger können sie sich in drei oder mehr Punkten berühren.

11) *Lehrsatz.* Zwei Hauptlinien können nicht mehr als zwei Punkte gemein haben; liegen sie auf derselben Hauptfläche, so müssen sie, wenn sie zwei Punkte gemein haben, sich schneiden.

Beweis. Hätten zwei Hauptlinien, die auf einer Hauptfläche liegen, drei Punkte A, B, C gemein, ohne zusammenzufallen, so müsste die eine derselben jedenfalls gekrümmt sein; ferner müssen von den drei Punkten

jedenfalls zwei so liegen, dass, wenn sie festgehalten werden, die Fläche nicht mehr über sich selbst wegbewegt werden kann; denn werden beispielsweise um den Punkt A Kugelflächen beschrieben mit den Halbmessern AB und AC, so kann höchstens einer der Punkte B und C, etwa C, Berührungspunkt der gegebenen Hauptfläche mit einer dieser Kugelflächen sein; durch den anderen der beiden Punkte, B, geht alsdann eine Kreislinie, und wenn die Hauptfläche so über sich selbst wegbewegt wird, dass Punkt A still steht, so müsste der Punkt B seinen Kreis beschreiben. Werden also A und B festgehalten, so kann die gegebene Hauptfläche sich nicht mehr aus ihrer Lage bewegen, ebenso wenig aber auch die beiden Hauptlinien, die durch A und B gehen; jede aber kann in sich selbst verschoben werden, und dabei würde ein dritter Punkt C, den sie gemein hätten, zugleich beide Linien beschreiben, diese müssten also zusammenfallen. Hätten nun weiterhin zwei Hauptlinien derselben Hauptfläche zwei Punkte gemein, ohne sich zu schneiden, so liessen sich zu der einen derselben auf der Fläche parallele Linien beschreiben, welche die andere Hauptlinie in mehr als zwei Punkten schneiden oder treffen würden.

Liegen die beiden Hauptlinien nicht auf derselben Hauptfläche, so sei die eine, a, Schnittlinie der Hauptflächen α und β, die andere b, Schnittlinie der Hauptflächen γ und δ. Hätten die beiden Hauptlinien nun drei Punkte gemein, so wären diese auch den vier Hauptflächen gemeinsam, d. h. jede derselben würde von den drei anderen in drei Hauptlinien geschnitten, die jene drei Punkte gemein hätten; diese drei Hauptlinien können keineswegs in eine zusammenfallen, da zwei derselben die gegebenen a und b sind. Der weitere Beweis gestaltet sich nun wie im ersten Falle.

Anmerkung. Eine Hauptlinie und eine Hauptfläche können ebenfalls höchstens zwei Punkte gemein haben, wobei die Linie die Fläche schneidet. Hat eine Hauptlinie drei Punkte mit einer Hauptfläche gemein, so fällt sie ganz in dieselbe.

12) *Lehrsatz.* Wenn eine geschlossene Hauptfläche α gegeben ist und ein Punkt A, der nicht auf ihr liegt und auch nicht, falls α Kugelfläche wäre, Mittelpunkt derselben ist, so giebt es immer zwei Kugelflächen mit dem Mittelpunkte A, welche die α berühren, die eine in einem Punkte B, die andere in einem Punkte C.

Beweis folgt unmittelbar aus Satz 4) Zusatz 4 unter Berücksichtigung dessen, dass zwei Hauptflächen sich nur in einem Punkte berühren können.

Zusatz 1). Wenn der Raum so bewegt wird, dass die Hauptfläche α sich über sich selbst wegbewegt, während A still steht, so stehen nach Satz 6) bezw. 8) die beiden Punkte B und C ebenfalls still, die nach Lehrsatz 12) durch A auf α bestimmt werden. Kugelflächen, die um zwei von den Punkten A, B und C so beschrieben werden, dass sie je durch den dritten gehen, berühren sich in diesem.

Zusatz 2). Wird der Punkt A auf der Hauptfläche α selbst gewählt, so erhält man nur eine einzige Hauptfläche, welche (in C) die α berührt und zu A als Mittelpunkt gehört. Auch in diesem Falle kann die α um A und C über sich selbst wegbewegt werden.

Zusatz 3). Zu einer geschlossenen Hauptlinie a, die auf einer beliebigen Hauptfläche α gegeben ist, gehört mindestens *ein* Punkt A (wenn die α geschlossen ist, zwei Punkte A und B), der still steht, während die α entlang der a über sich selbst wegbewegt wird. Ist nämlich β die Hauptfläche, deren Schnitt mit der α die a bestimmt, so wird A, bezw. so werden A und B bestimmt durch die Parallelflächen der β, welche die α berühren. Deren sind es zwei, wenn die α geschlossen ist, im anderen Falle eine. *Jede geschlossene Hauptlinie* auf einer Hauptfläche kann als *Kreislinie* betrachtet werden.

Anmerkung. Erklärung. Zwei Punkte, die auf einer geschlossenen Hauptfläche so liegen, dass diese um dieselben über sich selbst wegbewegt werden kann, heissen *Gegenpunkte.* Zu jedem Punkte einer geschlossenen Hauptfläche gehört *ein* Gegenpunkt und nur einer; zu verschiedenen Punkten gehören verschiedene Gegenpunkte.

13) *Lehrsatz.* Durch zwei Punkte A und B einer Hauptfläche, die nicht Gegenpunkte sind, können im Allgemeinen zwei, aber nicht mehr als zwei einander congruente, der Lage nach verschiedene Hauptlinien gelegt werden.

Beweis. Wäre die Hauptlinie eine Gerade, so geht aus 9) Zusatz 2) hervor, dass ausser ihr keine ihr congruente durch die beiden Punkte gehen kann. Ist die durch A und B gehende Hauptlinie gekrümmt, so kann sie, in A und B festgehalten, offenbar keine anderen Lagen annehmen, als diejenigen, die sie bei der Drehung um A und B beschreibt. Hierbei beschreiben ihre Punkte Kreise, z. B. Punkt C beschreibt den Kreis $CC'C$, der mit der gegebenen Hauptfläche höchstens zwei Punkte, nämlich ausser C noch C' gemein haben kann. Wenn nun C nach C', also ACB in die

Lage $AC'B$ kommt, so fällt sie wieder mit der Hauptfläche zusammen, da sie alsdann drei Punkte A, C', B, mit ihr gemein hat. Diese zwei Lagen der gegebenen Hauptlinie (ACB und $AC'B$) giebt es also höchstens, die durch A und B gehen können. Dieselben würden in eine zusammenfallen, wenn die ACB nach ihrer Drehung bis $AC'B$ mit der Strecke zusammenfiele, durch welche ACB zu einer (geschlossenen) Hauptfläche ergänzt wird. In diesem Falle müsste also die gegebene Hauptlinie geschlossen sein und durch A und B in zwei congruente Theile zerlegt werden. Ein zweiter Fall, in welchem ausser der ACB keine ihr congruente mehr durch die Punkte A und B gehen könnte, würde dann eintreten, wenn etwa der von Punkt C beschriebene Kreis die Kugelfläche in C berühren würde.

Anmerkung 1). Man kann die zweite Lage der ACB auch auf folgende Weise erhalten: Wenn man um A mit dem Halbmesser AB auf der Fläche einen Kreis beschreibt, so wird dieser die gegebene Hauptlinie höchstens in zwei Punkten, nämlich ausser in B noch in B' treffen. Dreht man nun die AB' um A, bis B' auf B fällt, so erhält man ebenso wie vorhin im Allgemeinen eine zweite Lage der ACB, die gleichfalls durch A und B geht, und es ist wieder klar, dass nur diese beiden Lagen möglich sind. Es ist ferner leicht einzusehen, dass man auf diese Weise dieselbe zweite Lage der ACB erhält wie bei der Drehung um A und B; denn wäre die Lage $AC'B$ verschieden von dieser neuen Lage, so bewege man $AC'B$ auf der Fläche um den Punkt A, bis sie mit der ursprünglich gegebenen zusammenfällt, was alsdann in einem Punkte B'' geschehen müsste, so würde der unter A mit dem Halbmesser AB beschriebene Kreis die gegebene Hauptlinie in den drei Punkten B, B' und B'' treffen. Die beiden Lagen der gegebenen Hauptlinie fallen in eine zusammen, wenn der um A mit AB beschriebene Kreis die gegebene Hauptlinie berührt, in welchem Falle dieselbe nothwendig wieder eine geschlossene Linie sein muss, die durch die Punkte A und B in zwei congruente Theile zerlegt wird.

Anmerkung 2). Fiele ferner die AB' nach der Drehung um A auf der Fläche ganz mit der AB d. h. mit sich selbst in umgekehrter Richtung zusammen, so müsste durch diese Linie die Hauptfläche, falls sie geschlossen ist, offenbar in zwei congruente Theile zerlegt werden. Die Hauptlinie müsste in diesem Falle durch den Gegenpunkt von A (und von B) gehen; denn ginge sie nicht durch den Gegenpunkt von A, so könnte man sie um A ein beliebiges Stück weit drehen, wobei sie eine zweite Lage erhielte,

die mit der ersten ausser A noch einen Punkt B gemein hätte, der nicht Gegenpunkt von A wäre. Dreht man also die Linie um diese zwei Punkte A und B, so müsste sie aus der einen Lage in die andere gebracht werden können, und daraus folgt nach dem Obigen unmittelbar, dass sie nicht dadurch mit sich selbst in umgekehrter Richtung in Deckung gebracht werden könnte, dass man sie auf der Fläche um einen ihrer Punkte dreht. Eine so beschaffene Linie würde, wenn sie um zwei auf ihr liegende Gegenpunkte gedreht würde, die Fläche beschreiben, sie würde also *durch die zwei Gegenpunkte halbiert;* würde sie überhaupt um zwei beliebige ihrer Punkte gedreht, so müssten ihre Punkte Kreise beschreiben, welche die gegebene Hauptfläche nicht schneiden, sondern berühren.

14) *Lehrsatz.* Durch eine gekrümmte Hauptlinie können höchstens zwei Hauptflächen gehen, die einander congruent sind.

Beweis. Wenn man auf der gegebenen Hauptlinie ACB, durch welche die Hauptfläche α geht, zwei Punkte, die nicht Gegenpunkte sind, festhält, so kann die α keine anderen Lagen mehr einnehmen, als diejenigen, welche sie bei der Drehung um A und B durchläuft. Die ACB wird dabei aus der ursprünglichen Lage der Fläche heraustreten und höchstens einmal wieder mit derselben zusammentreffen in $AC'B$. Bezeichnet man die Lage der Fläche, die dieser Drehung von ACB nach $AC'B$ entspricht, durch α', so hat man zwei Hauptflächen, welche die $AC'B$ (die der ACB congruent ist) gemein haben. Man kann nun die ganze von diesen beiden Flächen gebildete Figur so zurückdrehen, dass $AC'B$ wieder auf ACB kommt, dann hat man zwei Flächen α' und α (wovon die eine die ursprünglich gegebene Lage einnimmt), welche die ACB gemein haben, und es ist leicht einzusehen, dass es eine andere Lage der α nicht mehr giebt, für welche dies zutrifft. Würde die ACB die α in zwei congruente Theile zerlegen, so erhielte man, dem Vorigen zufolge (13) Anm. 2) keine zweite Lage der α, welche durch ACB ginge; die beiden Lagen α und α' würden in eine zusammenfallen.

15) *Lehrsatz.* Durch zwei Punkte A und B einer Hauptfläche α ist immer eine und im Allgemeinen nur eine Hauptlinie von der Art möglich, dass sie, wenn sie auf der Fläche um einen ihrer Punkte gedreht wird, mit sich selbst in umgekehrter Richtung in Deckung gebracht werden kann.

Beweis. Ist die Hauptfläche eine *Ebene* (vgl. 9) Zusatz 1) so ergiebt sich der Satz von selbst daraus, dass durch zwei Punkte der-

selben immer eine Gerade und nur eine auf der Ebene möglich ist, die demnach auch in umgekehrter Richtung mit sich zusammenfallen muss, sobald die beiden Lagen der Geraden zwei Punkte gemein haben.

Ist die Hauptfläche gekrümmt, so fassen wir zunächst den Fall in's Auge, wo die beiden Punkte keine Gegenpunkte sind. Wird nun die α um A und B gedreht, so beschreiben ausser A und B ihre sämmtlichen Punkte Kreise, die α selbst durchläuft verschiedene Lagen α', α'', ... welche die α nach verschiedenen Hauptlinien schneiden; eine solche Hauptlinie sei ACB und $AC'B$ die ihr congruente. Es sei nun um den einen der Punkte, beispielsweise um A, eine Kugelfläche $\varkappa$ mit dem Halbmesser $AC = AC'$ beschrieben, welche die α nach dem Kreise $(\varkappa, \alpha)$ schneidet. Bei der Drehung der α um A und B wird auch die $(\varkappa, \alpha)$ sich bewegen, und es kann keiner ihrer Punkte still stehen; die $\varkappa$ selbst bewegt sich, da ihr Mittelpunkt A still steht, über sich selbst weg, die Punkte der $(\varkappa, \alpha)$ beschreiben Parallelkreise auf der $\varkappa$; die $(\varkappa, \alpha)$ selbst beschreibt ein Flächenstück, welches die $\varkappa$ indessen nicht ganz überdeckt, sondern zu beiden Seiten von Kreislinien begrenzt wird, deren Mittelpunkte die beiden auf der $\varkappa$ durch den Punkt B (nach 12) bestimmten Gegenpunkte sind, welche nicht auf der α liegen können, also von dem durch die $(\varkappa, \alpha)$ beschriebenen Flächenstücke ausgeschlossen sind; diese Kreise berühren die $(\varkappa, \alpha)$, und zwar geschehe dies in den Punkten O und P.

Es ist nun klar, dass die α bei ihrer Bewegung nicht den ganzen Raum durchmisst, sondern nur einen Theil und dass ein anderer Theil des Raumes, in welchem die durch B auf der $\varkappa$ bestimmten Gegenpunkte liegen, nicht von ihr durchlaufen wird. Die Grenze des von der α durchmessenen Raumes bildet eine (geschlossene oder unbegrenzte) Fläche, welche mit der α die Punkte O und P und alle auf ähnliche Art bestimmten Punktepaare gemein hat.

Auf der $(\varkappa, \alpha)$ wird durch die Bogen ACB und $AC'B$ ein Kreisbogen CC' abgeschnitten, auf welchem der Punkt O liegen möge (P liegt alsdann auf dem Bogen, der CC' zum Kreise $(\varkappa, \alpha)$ ergänzt). Nun sei mit dem Halbmesser BO ein Kreis um B beschrieben, der ACB in D und $AC'B$ in D' schneidet. Man drehe ferner die Bogen AC und AC' um A, bis sie in O zusammentreffen, und ebenso die Bogen BD und BD', bis sie gleichfalls in O zusammentreffen; alsdann bilden die drei Bogen AO, BO und AB auf der einen und die gleichnamigen auf der anderen Seite zwei dreieck-

artige Figuren. Man kann nun, indess die Punkte A, O, B still stehen, zunächst die beiden Bogen AO, dann die beiden Bogen BO und endlich die beiden Bogen AB auf einander bringen, alsdann fällt auch C auf C', D auf D' und es leuchtet ein, dass nun auch der Bogen OC auf OC' muss gebracht werden können, dass also beide congruent sind; ebenso wird gezeigt, dass die Bogen PC und PC' congruent sind, dass also der Kreis $(\varkappa, \alpha)$ durch die Punkte O, P in zwei congruente Theile zerlegt wird. Dasselbe gilt von allen um A und ebenso von allen um B beschriebenen Kreisen auf der α, auf jedem derselben liegen zwei Berührungspunkte der Fläche α und der durch die Umdrehung der α entstandenen Fläche, und diese beiden Punkte halbieren den Kreis.

Es ist weiterhin leicht einzusehen, dass diese Punkte O, P eine Linie erfüllen müssen. Denkt man sich nämlich um A in steter Aufeinanderfolge die Kreise $(\varkappa, \alpha)$ beschrieben und auf ihnen die Punktepaare O, P bestimmt, so könnte eine Unterbrechung des Berührungsgebildes, das wir so erhalten, nur dadurch entstehen, dass zwei getrennt liegende Berührungspunkte demselben Kreise angehören würden. Das kann aber nicht sein, es sei denn, dass diese Punkte Halbierungspunkte des Kreises wären; in diesem Falle aber hat man wieder zwischen ihnen die Folge der Berührungspunkte, die sich auf den von diesem Kreise umschlossenen kleineren Kreisen bestimmen lassen.

Wird ferner um O mit dem Halbmesser $OC = OC'$ ein Kreis beschrieben, der von jener Berührungslinie mindestens in zwei Punkten R und S geschnitten werden muss, so beschreibe man um B mit dem Halbmesser BR oder BS einen Kreisbogen, der die ACB und $AC'B$ in E und E' schneidet; wenn man nun OC und OC' so dreht, dass C und C' in R oder S zusammentreffen und ebenso BE und BE', so lässt sich ganz auf dieselbe Weise wie oben zeigen, dass R und S Halbierungspunkte der Kreisbogen sind, in welche der um O beschriebene Kreis durch C und C' zerlegt wird, dass also dieser Kreis durch die Punkte R und S halbiert wird. Nun aber können wir die Hauptlinien ACB und $AC'B$ nach Belieben wählen (so weit man noch Schnittkreise bei der Drehung der α um A und B erhält), so dass also CC' und damit $OC = OC'$ innerhalb dieser Grenzen beliebig gross oder klein wird. Demnach werden auch alle um O beschriebenen Kreise durch jene Berührungslinie halbiert, man kann also die letztere so auf sich selbst legen, dass A auf O kommt, wobei sie in Deckung mit

sich bleibt. Da wir endlich auch O in ganz beliebiger Entfernung von A nehmen können, so folgt, dass jene Berührungslinie, die durch die Punktepaare O, P gebildet wird, in der That die Eigenschaft haben muss, dass sie in sich selbst verschoben werden kann.

Aus 13) Anm. 2 folgt endlich, dass diese Linie mit sich selbst in umgekehrter Richtung in Deckung gebracht werden kann.

Ist endlich die gegebene Hauptfläche geschlossen und sind die Punkte A und B Gegenpunkte auf ihr, so wähle man einen beliebigen dritten Punkt C und lege durch A und C dem Vorigen zufolge eine Hauptlinie, welche durch Drehung auf der Fläche um einen ihrer Punkte mit sich in umgekehrter Richtung in Deckung gebracht werden kann; dieselbe wird nach 13) Anm. 2 auch durch B gehen. In diesem Falle ist aber nicht bloss eine Linie von der verlangten Beschaffenheit möglich, sondern beliebig viele, da man C beliebig wählen kann.

Anm. Erklärung. Eine Hauptlinie der vorgedachten Art nenne ich *Constructionslinie* oder *Richtlinie.* Es ist klar, dass sie sich vor allen anderen Hauptlinien einer Hauptfläche dazu eignet, Constructionen irgend welcher Art auf der Fläche vorzunehmen, Flächengebilde mit einander zu vergleichen u. s. w., da sie durch zwei Punkte auf der Fläche unzweideutig bestimmt ist.

Zusatz. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, dass auf jeder gekrümmten Hauptfläche durch drei Punkte immer eine Hauptlinie möglich ist. Denn zwei der Punkte sind jedenfalls nicht Gegenpunkte zu einander; dreht man also um diese die Fläche, so beschreibt der dritte Punkt einen Kreis, der die Fläche entweder berührt oder in einem zweiten Punkte schneidet. Im ersten Falle geht durch die drei Punkte eine Richtlinie, im zweiten erhält man durch den zweiten Schnittpunkt jenes Kreises eine Hauptlinie, welcher die verlangte congruent ist.

Anmerkung. Die einfachen Sätze über Congruenz bzw. Symmetrie zweier durch Richtlinien gebildeten Figuren einer Hauptfläche, den Begriff von Winkeln u. s. w. können wir auf Grund des Bisherigen im Folgenden ohne weiteres voraussetzen.

16) Lehrsatz. Durch zwei Kreise a und b, die zwei Punkte A und B gemein haben, ist immer eine Hauptfläche bestimmt und nur eine, die nämlich dadurch entsteht, dass man den einen der Kreise in sich selbst verschiebt, wobei der andere die Fläche beschreibt.

Beweis. Wenn man den einen der Kreise, a, in sich selbst verschiebt, so beschreiben die Punkte des anderen parallele Kreise, und zwar treffen diese den Kreis b je in zwei Punkten (ausgenommen zwei, die den Kreis b berühren). Um dies einzusehen, stellen wir folgende Erwägungen an. Wir können annehmen, dass von den Hauptflächen, deren Schnittlinien die Kreise a und b sind, je eine eine Kugelfläche ist: denn bestimmt man nach 12) Zusatz 3 auf einer der Hauptflächen, deren Schnittlinie z. B. der Kreis a ist, den Mittelpunkt dieses Kreises, so kann man um diesen eine Kugelfläche beschreiben, die jene Hauptfläche nach dem Kreise a schneidet; ebenso ist es beim Kreise b. Diese Kugelflächen heissen α bzw. β. Die α hat mit der β zwei Punkte, A und B, gemein, schneidet sie also nach dem Kreise (α, β), der wiederum den Kreis b in A und B schneidet (fielen die Kreise (α, β) und b in einen zusammen, so läge b auf der Kugelfläche α wie Kreis a, d. h. α wäre die Hauptfläche, die durch die Kreise a und b ginge, und nach Satz 9) kann keine zweite Hauptfläche durch diese beiden Kreise gehen). Es sei nun O auf der Kugelfläche β der Mittelpunkt des Kreises b, P der Mittelpunkt des Kreises (α, β), es seien ferner die Richtlinien OP, OA, OB, PA, PB gezogen, so sind die Dreiecke OAP und OBP symmetrisch und die Kreisbogen OAP und OBP congruent. Daraus folgt weiterhin, wenn R und S die Schnittpunkte des Kreises b mit der Richtlinie OP sind, dass $RA = RB$ und dass, wenn nun ein beliebiger Parallelkreis zu (α, β) auf der β beschrieben wird, der den Kreis b in den Punkten A' und B' trifft, $RA' = RB'$ und $AA' = BB'$. Eine Parallelfläche zur Kugelfläche α schneidet also auf dem Kreise b Strecken ab $AA' = BB'$. Ganz dasselbe ist aber auch der Fall für die Parallelfläche zu der Hauptfläche α', deren Schnittlinie mit der Kugelfläche α der Kreis a ist; denn die α' schneidet die Kugelfläche β ebenfalls nach einem durch die Punkte A und B gehenden Kreise und man erhält nun eine ähnliche Figur wie vorhin. Jene beiden Parallelflächen zu α' und α schneiden sich aber offenbar in einer Linie, die der Schnittlinie von α' und α, nämlich dem Kreise a parallel ist und die, wie wir sahen, durch die Punkte A' und B' geht, welche den Parallelflächen zu α' und α gemein sind.

Die Fläche nun, welche der Kreis b beschreibt, wenn man den Kreis a in sich selbst verschiebt, lässt sich, wie leicht einzusehen, längs der a in sich verschieben, ohne dass sie mit sich ausser Deckung kommt. Nun behaupte ich, dass dies auch längs der Linie b geschehen kann. Denn

wäre dies nicht der Fall, so würde sie einen Raum beschreiben und zwar, bis sie wieder in die alte Lage zurückgekehrt ist, einen ringförmigen Körper; aber indem man die so entstandene Figur wieder längs der a bewegt, würde der Ring sich verbreitern und man erhielte schliesslich statt der Fläche einen Körper, der zwischen zwei Flächen eingeschlossen wäre, von welchen keine mit der anderen einen Punkt und noch weniger eine Linie gemein haben könnte und von denen jede nach zwei Richtungen längs der a und längs der b über sich selbst wegverschoben werden könnte. Aber andererseits müssten, nach dem oben Bewiesenen, nothwendig diese beiden sowohl durch den Kreis a als durch den Kreis b gehen. Es muss also die von Kreis b beschriebene Fläche auch längs dem Kreise b über sich selbst wegverschoben werden können, ohne mit sich ausser Deckung zu kommen, d. h. auf beide Arten, ob man den Kreis a oder den Kreis b in sich verschiebt, erhält man durch die Bewegung des anderen Kreises b oder a eine und dieselbe Fläche.

Es folgt aber weiterhin, dass die von b beschriebene Fläche ganz beliebig über sich selbst wegbewegt werden kann, ohne ausser Deckung mit sich zu kommen; denn beispielsweise lässt sich das von der b umgrenzte Flächenstück (die Kreisfläche b) dadurch, dass man die Fläche entlang der a, dann entlang der ursprünglichen Lage b, dann wieder entlang der ursprünglichen Lage der a u. s. w. fortbewegt, an jeden beliebigen Ort der Fläche bringen, und indem man nunmehr noch die Kreisfläche b entlang ihrer Grenze verschiebt, findet man, dass die durch die Kreise a und b bestimmte Fläche so über sich selbst wegbewegt werden kann, dass nicht nur einer ihrer Punkte, sondern auch irgend ein auf ihr angenommenes Gebilde irgend eine beliebige andere Lage erhält d. h. diese Fläche kann ganz beliebig über sich selbst wegbewegt werden, ohne mit sich ausser Deckung zu kommen.

Anmerkung 1). Statt zweier Kreise, die zwei Punkte gemein haben, genügt auch ein Kreis a und ein Punkt A ausserhalb des Kreises. Denn man kann um A eine Kugelfläche beschreiben, welche den Kreis a entweder schneidet oder ganz in sich enthält. In jedem Falle giebt es dann auf a zwei Punkte B und C, die zugleich auf der Kugelfläche liegen. Beschreibt man nun um B und C mit den Halbmessern BA und CA Kugelflächen, so schneiden sich diese in einem Kreise, der wiederum von der um A beschriebenen Kugelfläche in zwei Punkten O und O' geschnitten wird. Eine

um O mit den Halbmessern $OA = OB = OC$ beschriebene Kugelfläche geht nunmehr durch die drei Punkte A, B und C, es kann also durch diese drei Punkte ein Kreis gelegt werden (15) Zus. 1), der mit dem gegebenen Kreise die zwei Punkte B und C gemein hat.

Anmerkung 2). Bestimmt man auf einer Kugelfläche α einen Hauptkreis a und beschreibt um einen beliebigen Punkt desselben eine zweite Kugelfläche β, die durch den Mittelpunkt der α geht und die jenen Hauptkreis in zwei Punkten treffen wird, so ist durch diese zwei Punkte und den Mittelpunkt der α auf der β ein Kreis bestimmt, der mit dem Kreise a zwei Punkte gemein hat. Durch diese zwei Kreise ist *eine Hauptfläche bestimmt, welche nichts anderes sein kann, als eine Ebene,* da drei Punkte auf ihr so liegen, dass wenn man den Raum um zwei derselben dreht, der dritte still steht (nämlich der Mittelpunkt der α und zwei auf dem Kreise a liegende Gegenpunkte der α).

Anmerkung 3). Die Ebene ist übrigens schon durch drei Punkte bestimmt, die nicht auf einer und derselben Geraden liegen. Sind nämlich A, B, C drei solche Punkte, so beschreibe man um A eine Kugelfläche, die durch B geht, bestimme auf dieser die zu C gehörigen Gegenpunkte (nach 12) und lege durch diese einen Hauptkreis. Dann kann man fortfahren wie in Anm. 1. *Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, kann also immer eine und nur eine Ebene gelegt werden.* Was also in Satz 9) Zusatz 1 hypothetisch von der Ebene und der Geraden bemerkt wurde, erhält jetzt volle Gültigkeit. Durch zwei Punkte im Raume ist immer eine und nur eine Gerade möglich, und durch beliebige zwei Punkte einer Ebene lässt sich immer eine Gerade legen, die ganz in der Ebene liegt. Dies sind *die beiden Axiome von der Geraden und von der Ebene.*

17) *Lehrsatz.* Wenn von zwei parallelen Hauptflächen α und β die eine, α, geschlossen ist, so ist es auch die andere; ist die erstere unbegrenzt, so ist es auch die zweite.

Beweis. Ist die α geschlossen und beschreibt man um irgend einen von ihr ausgeschlossenen Punkt B, durch welchen die β gehen soll, eine Kugelfläche, welche die α von aussen in A berührt, legt sodann durch A auf der α eine beliebige Richtlinie, so kann man jene Kugelfläche auf dieser Richtlinie gleiten lassen, wobei der Gegenpunkt von A (auf der Kugelfläche um B genommen) offenbar eine in sich selbst verschiebbare Hauptlinie beschreibt, welche die Richtlinie für eine neue, nothwendig geschlossene,

der α parallele Hauptfläche sein muss, die den Punkt B einschliesst. Dann muss die durch B gehende Parallelfläche zur α natürlich auch geschlossen sein.

Ist die eine der Hauptflächen unbegrenzt, so ist es auch die andere; denn wäre diese geschlossen, so wäre es auch jene.

18) *Erklärung.* Wird auf einer gekrümmten Hauptfläche ein Kreis beschrieben und durch diesen eine Ebene gelegt, so wird letztere durch den Kreis in zwei Theile zerlegt, deren einer eine Kreisfläche, der andere nach allen Seiten ins Unbegrenzte ausgedehnt ist. Diese beiden Theile liegen zu verschiedenen Seiten der gekrümmten Hauptfläche. Nun soll diejenige Seite der letzteren, welche der ebenen Kreisfläche zugekehrt ist, die *concave,* die andere die *convexe* Seite heissen. (Von zwei concentrischen Kugelflächen wendet die äussere der inneren die concave und die innere der äusseren die convexe Seite zu.)

Anmerkung. Erklärung. Von zwei parallelen gekrümmten Hauptflächen wende die eine, beispielsweise die β, der anderen α die convexe, α der β die concave Seite zu. Es soll nun α die äussere, β die innere der beiden Hauptflächen heissen.

19) *Lehrsatz.* Zwei parallele Hauptflächen, die gekrümmt sind, können einander nicht congruent sein.

Beweis. Sind die beiden Flächen geschlossen, so erhellt der Satz von selbst. Wären aber zwei unbegrenzte gekrümmte Hauptflächen, die parallel sind, einander congruent, so könnte man die eine, äussere, α, so auf die β (die innere) bringen, dass sie ganz mit ihr zusammenfällt. Denkt man aber den zwischen α und β enthaltenen Raum mit der α bewegt (denkt man die Flächen α und β in fester Verbindung mit einander), so wird durch die neue Lage der β eine dritte Fläche γ bestimmt, die der α und β congruent und parallel ist. Ebenso kann man weitere Flächen δ, ε ... bestimmen, die alle unter einander und der α und β parallel und congruent sein müssen, wobei zugleich die Räume $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\delta}$, $\overline{\delta\varepsilon}$ ... einander congruent sind. Nun wähle man auf der α zwei Punkte A und B nach Belieben, so kann man die α um A und B so drehen, dass sie die β schneidet, was nach einer gekrümmten Hauptlinie geschehen muss. Da aber α und β congruent sind, so kann man auch die α so auf die β bringen, dass jene Schnittlinie beider wieder auf sich selbst (in umgekehrter Richtung) fällt. Durch die Lage von A und B werden sodann auf der β zwei Punkte A'

und B' bestimmt, die offenbar zu jener Schnittlinie auf der β ganz dieselbe Lage haben, wie die Punkte A und B zu derselben Schnittlinie auf der α. Dreht man um diese Punkte A' und B' die β ebenso weit nach der γ hin, wie vorher die α nach der β, so schneidet die β die γ nach derselben Hauptlinie, nach welcher sie selbst von der α geschnitten wurde. Denkt man aber die α als fest mit der β verbunden bei dieser Drehung mitgeführt, so erhielte man drei (und bei Fortsetzung des Verfahrens beliebig viele) congruente gekrümmte Hauptflächen, die alle durch eine und dieselbe gekrümmte Hauptlinie gehen würden, was nach Satz 14) unmöglich ist.

Anmerkung. Wenn dieser Beweis als zutreffend erachtet wird, so ist in dem vorstehenden Satze, und zwar, wie ich beifügen möchte, unabhängig von den beiden anderen Axiomen der Geometrie ein *Aequivalent enthalten für das dritte Axiom der Euklidischen Geometrie,* für das Parallelenaxiom. Denn die sogenannte imaginäre Geometrie, welche, im Gegensatze zu dem Axiom des Euklid, von der Annahme ausgeht, dass die Winkelsumme im ebenen Dreieck kleiner als zwei Rechte ist, gelangt bekanntlich zu einer unbegrenzten, gekrümmten Hauptfläche, der sogenannten *Grenzfläche,* deren Parallelflächen mit ihr und unter einander congruent sind. Wendet man auf diese das Verfahren an, auf welches wir den obigen Beweis gegründet haben, so würde man mehrere Grenzflächen erhalten, die alle durch eine und dieselbe gekrümmte Linie gingen. Lässt man die parallelen Grenzflächen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ einander näher rücken, wobei die Räume $\overline{\alpha\beta}, \overline{\beta\gamma}, \overline{\gamma\delta} \ldots$ stets congruent bleiben, so ergiebt sich, indem man schliesslich eine stetige Aufeinanderfolge der Flächen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ annimmt, dass jede Grenzfläche um eine in ihr liegende gekrümmte Linie gedreht werden könnte, ohne dass diese Linie ihre Lage verändern würde.

Uebrigens bin ich weit entfernt, der imaginären Geometrie ihre Berechtigung abzusprechen: sie erhält nur den ihr gebührenden Platz zugewiesen. Denn während sie nach der bisherigen Auffassung eine Geometrie der Ebene war und in gewissem Sinne als Ersatz der Euklidischen Geometrie galt, wird sie nunmehr als *Geometrie der imaginären Hauptfläche* neben die Geometrie der Kugelfläche und die Geometrie der Ebene in ähnlicher Weise treten, wie in der Lehre von den Zahlengrössen neben dem Gebiete der reellen das Gebiet der imaginären Grössen steht. Wir können nämlich, wenn wir eine Fläche annehmen, die alle Eigenschaften einer Hauptfläche hat, für welche aber die Winkelsumme eines durch drei Richtlinien (Constructionslinien)

gebildeten Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist (eine Hauptfläche, die in Wirklichkeit gar nicht existirt, also imaginär ist) — wir können, sage ich, wenn wir auf dieser Fläche ganz so operiren, als ob sie wirklich existirte, ein Geometriesystem entwickeln, das *durchaus widerspruchsfrei* ist. *Lobatschewsky, Bolyai* u. A. haben bekanntlich ein solches Geometriesystem entwickelt, von der Annahme ausgehend, dass es sich dabei um die Ebene handle; beide haben in ihrer Entwickelung ferner öfters zu räumlichen Constructionen ihre Zuflucht nehmen müssen, so namentlich bei der Ableitung der Kreisfunctionen und der trigonometrischen Formeln. Ich behalte mir vor, in einem zweiten Abschnitte den Nachweis zu liefern, dass Sphärik (einschliesslich der sphärischen Trigonometrie) und Geometrie und Trigonometrie der imaginären Hauptfläche in ihrer ganzen Entwickelung unabhängig sind von einander, wie von jeder ebenen und geradlinigen Construction. Doch ich habe damit schon vorgegriffen und kehre wieder zu unserer bisherigen Entwickelung zurück, die ich noch auf eine kurze Strecke verfolgen will, um zu einem Satze zu gelangen, der uns nicht zwingt, die imaginäre Geometrie bis zur Grenzfläche zu entwickeln, um dann erst den in ihr liegenden Widerspruch aufzudecken.

20) *Lehrsatz.* Durch jeden Punkt A einer Hauptfläche α geht eine Gerade, Axe genannt, um welche die Fläche derart gedreht werden kann, dass sie über sich selbst sich wegbewegt.

Beweis. Wenn man um den gegebenen Punkt A eine Kugelfläche beschreibt, welche die Fläche α nach einem Kreise schneidet, und sodann den Mittelpunkt dieses Kreises bestimmt, so ist durch den Mittelpunkt dieses Kreises und den Punkt A eine Gerade bestimmt von der verlangten Beschaffenheit.

Anmerkung 1). Die Axe einer Hauptfläche ist auch Axe für deren Parallelflächen. Denn es sei α' Parallelfläche der α und werde in A' von der durch A gehenden Axe der α geschnitten, so wird die α' bei der Drehung um jene Axe ebenfalls über sich selbst weg um A' sich bewegen, weil A' still steht und die Schnittlinie der α' mit der um A beschriebenen Kugelfläche auf letzterer ein Parallelkreis zu a ist, dessen Mittelpunkt derselbe ist wie der für a.

Anmerkung 2). Wenn man von zwei parallelen Hauptflächen die eine, etwa die innere, β, so durch den Raum bewegt, dass eine ihrer Axen in sich selbst sich verschiebt, so wird sie die andere, α, zuerst berühren

und dann durchdringen, nämlich der Reihe nach sie nach Kreisen durchschneiden, die alle einander parallel sind und deren Mittelpunkte auf der β bezw. auf der α die Punkte B und A sind, in welchen die beiden Flächen von der Axe geschnitten werden. Und zwar wendet alsdann die Kreisfläche, die durch diesen Kreis auf der β (welche anfänglich die innere der beiden Hauptflächen war) begrenzt wird, der auf der α begrenzten ihre concave Seite zu, diese jener die convexe. Denn bei der anfänglichen Lage wendet die β (die innere) der α die convexe Seite zu, nachdem sie aber mit einem Stück (der Kreisfläche mit dem Mittelpunkte B) auf die andere Seite der α getreten, muss sich für dieses Stück das Verhältniss umkehren. Sind insbesondere beide Hauptflächen unbegrenzt und gekrümmt, so kann man mit der inneren die äussere nach einem beliebigen Kreise schneiden.

Anmerkung 3). Jede geschlossene Hauptfläche ist eine Kugelfläche. Denn bestimmt man auf ihr zwei Gegenpunkte und legt durch diese eine beliebige Ebene, so schneidet letztere die Hauptfläche nach einem Kreise, der Richtlinie für dieselbe ist. Bestimmt man auf den beiden Kreisflächen, in welche die gegebene Hauptfläche durch diese Richtlinie zerlegt wird, die Mittelpunkte derselben, die wiederum Gegenpunkte sind, und legt durch diese zwei Punkte eine Gerade, so schneidet letztere jene Ebene in einem Punkte, der für die gegebene Hauptfläche Mittelpunkt sein muss, da durch ihn keine Hauptfläche gehen kann, die parallel zur gegebenen ist. Man erhält diesen Mittelpunkt auch einfach als den Schnittpunkt von drei Ebenen, die durch drei beliebig auf der Hauptfläche angenommene Richtlinien gelegt werden.

21) *Lehrsatz.* Es giebt nur *eine Art unbegrenzter Hauptflächen, nämlich die Ebene.*

Beweis. Gäbe es eine Hauptfläche α, welche unbegrenzt und gekrümmt wäre, so könnte man um irgend einen ihrer Punkte eine Kugelfläche β beschreiben, welche sie nach einem Kreise schneiden würde. Durch diesen Kreis lege man eine Ebene. Man hat alsdann ausser der Ebene zwei Hauptflächen, welche durch jenen Kreis gehen, eine geschlossene β und eine unbegrenzte α. Diejenige Seite der Ebene, auf welcher der geschlossene Theil der unbegrenzten Hauptfläche liegt, heisse die linke, die andere die rechte. Wenn man nun zu der unbegrenzten als äusserer eine parallele Hauptfläche α' als innere annimmt und diese entlang derjenigen gemeinsamen Axe, welche durch den Mittelpunkt jenes Kreises geht, fort-

bewegt, bis die α' die α nach jenem Kreise schneidet, so wird die geschlossene Kreisfläche der α' ebenfalls links von der Ebene liegen und der unbegrenzte Theil der α' rechts von der Ebene und zwar auf der concaven Seite des rechts der Ebene liegenden Theiles der α. Eine weitere Parallelfläche zur α, als innere zu α' genommen und wiederum durch jenen Kreis gelegt, wird mit ihrem unbegrenzten Theile auf der concaven Seite des unbegrenzten Theiles der α' liegen; dasselbe gilt für weitere Parallelflächen $\alpha^{(III)}$, $\alpha^{(IV)}$, ... Auf der anderen Seite nehme man zur β eine äussere Parallelfläche β' an und lege sie durch jenen Kreis in der Weise, dass das links von der Ebene fallende Stück auf der concaven Seite der β, das andere somit auf der convexen Seite der β liegt und ähnlich bei weiteren Parallelflächen $\beta^{(II)}$, $\beta^{(III)}$ u. s. w.

So wachsen nun die beiden Systeme, das der unbegrenzten und das der geschlossenen Hauptflächen, gewissermassen einander entgegen. Was immer nun für ein Punkt rechts der Ebene zwischen den Hauptflächen $\alpha^{(n)}$ und $\beta^{(n)}$, d. h. auf der concaven Seite der ersteren und der convexen Seite der letzteren angenommen wird, so lässt sich durch denselben und den oben angenommenen Kreis, der den Hauptflächen $\alpha, \ldots, \beta, \ldots$ gemeinsam ist, eine Hauptfläche legen, die entweder geschlossen oder unbegrenzt sein muss. Nun muss aber doch irgendwo eine Grenze zwischen beiden Systemen sein: entweder eine unbegrenzte Hauptfläche A von der Art, dass jede durch den Kreis gehende Hauptfläche die rechts der Ebene auf der concaven Seite der A liegt, geschlossen ist, oder eine geschlossene Hauptfläche B von der Art, dass jede durch den Kreis gehende Hauptfläche, die rechts der Ebene auf der convexen Seite der B liegt, unbegrenzt ist. Aber weder das eine noch das andere kann zufolge Satz 20), Anmerkung 2) der Fall sein.

Anmerkung 1). *W. Bolyai* hat die Bemerkung gemacht, dass, wenn drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, immer in eine Kugelfläche fallen könnten, das Euklidische Parallelenaxiom damit bewiesen wäre (Absolute Geometrie nach *Johann Bolyai*, herausgegeben von *Frischauf*, Leipzig 1872 Seite 91). Dieses Axiom *W. Bolyai*s folgt in der That aus unserem Satze 21. Denn legt man durch zwei der drei Punkte einen beliebigen Kreis, in dessen Ebene der dritte Punkt nicht liegt, so ist durch den Kreis und den dritten Punkt immer eine Hauptfläche bestimmt, die keine Ebene sein kann, also eine Kugelfläche sein muss.

Anmerkung 2). Ebenso wie es nur eine unbegrenzte Hauptfläche giebt, nämlich die Ebene, ***giebt es auch nur eine unbegrenzte Hauptlinie, nämlich die Gerade.*** Denn nach Anmerkung 1) liesse sich durch eine unbegrenzte Hauptlinie, die gekrümmt wäre, da beliebige drei ihrer Punkte nicht auf einer Geraden liegen, eine Kugelfläche legen; aber auf einer solchen kann keine unbegrenzte Hauptlinie liegen. ***Die Parallellinie zu einer Geraden ist also wieder eine Gerade.***

22) *Lehrsatz.* Sind auf einer Ebene zwei parallele Gerade gegeben, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die beiden inneren Winkel zu verschiedenen Seiten der schneidenden einander gleich.

Beweis. Die parallelen Geraden a und b werden von der AB in den Punkten A und B geschnitten. Bestimmt man den Halbierungspunkt C der AB und legt durch C eine dritte Gerade c, parallel den beiden a und b, so kann man um den Punkt C die ganze Ebene über sich selbst wegdrehen, bis die Gerade c mit sich in umgekehrter Richtung zusammenfällt; dann fällt auch die AB in umgekehrter Richtung mit sich zusammen, und zwar fällt B auf A, A auf B; mithin muss die b in die anfängliche Lage der a und a in diejenige der b kommen, da zu einer Geraden durch einen Punkt ausser ihr nur *eine* Parallele möglich ist. Hieraus folgt aber die Gleichheit jener Winkel.

23) *Lehrsatz.* ***Die Winkelsumme im ebenen, geradlinigen Dreieck ist gleich zwei Rechten.***

Beweis folgt unmittelbar aus Satz 22) auf dieselbe Art wie der Satz in der Euklidischen Geometrie bewiesen wird.

Der Flächensatz bei der Bewegung auf abwickelbaren Flächen.

(Von Herrn *J. N. Hazzidakis* in Athen.)

Der bekannte Flächensatz bei der Centralbewegung lässt sich mit einer kleinen Modification für andere Bewegungen erweitern. Wenn nämlich die die Fläche beschreibende Gerade nicht von einem festen Punkte ausgehen, sondern allgemeiner zu einer gegebenen Curve (mag sie eben oder Raumcurve sein) tangential bleiben, also eine abwickelbare Fläche erzeugen soll, so ergiebt sich als nothwendige Bedingung für die Proportionalität der beschriebenen Fläche zur Zeit folgende:

„Die Componente der Kraft nach der in der Tangentialebene der abwickelbaren Fläche errichteten Normale auf die beschreibende Gerade muss umgekehrt proportional der vierten Potenz dieser Geraden und direct proportional dem ersten Krümmungsradius der Berührungscurve sein."

Diese Bedingung ist auch hinreichend, wenn nur die Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen Punktes gehörig bestimmt wird.

Es sei $M(x_1, y_1, z_1)$ ein beliebiger Punkt einer abwickelbaren Fläche und $I(x, y, z)$ der ihm entsprechende Punkt der Wendecurve. Ferner sei ϱ der Abstand IM und α, β, γ die Richtungscosinus der Geraden IM, welche die Wendecurve im Punkte I berührt: dann ist

$$(1.)\qquad \begin{cases} x_1 = x+\alpha\varrho, \\ y_1 = y+\beta\varrho, \\ z_1 = z+\gamma\varrho. \end{cases}$$

Bewegt sich nun der Punkt M auf der Fläche in irgend einer Weise, so ist

$$(2.)\qquad \begin{cases} dx_1 = dx+\alpha d\varrho+\varrho d\alpha, \\ dy_1 = dy+\beta d\varrho+\varrho d\beta, \\ dz_1 = dz+\gamma d\varrho+\varrho d\gamma. \end{cases}$$

Es ist aber $d\alpha = \xi d\sigma$, $d\beta = \eta d\sigma$, $d\gamma = \zeta d\sigma$, worin $d\sigma$ den Contingenzwinkel der Wendecurve und ξ, η, ζ die Richtungscosinus ihrer Hauptnormale im Punkte I bedeuten, folglich kann man die Gleichungen (2.) auch so schreiben

$$(3.)\quad \begin{cases} dx_1 = \alpha(ds+d\varrho)+\varrho\xi d\sigma, \\ dy_1 = \beta(ds+d\varrho)+\varrho\eta d\sigma, \\ dz_1 = \gamma(ds+d\varrho)+\varrho\zeta d\sigma. \end{cases}$$

Differentiirt man diese Gleichungen noch einmal und beachtet die Relationen

$$d\xi = -\alpha d\sigma+\lambda d\tau,$$
$$d\eta = -\beta d\sigma+\mu d\tau,$$
$$d\zeta = -\gamma d\sigma+\nu d\tau,$$

welche zwischen den neun Cosinus der drei Hauptrichtungen jeder Curve bestehen, so findet man

$$(4.)\quad \begin{cases} d^2x_1 = A\alpha+B\xi+C\lambda, \\ d^2y_1 = A\beta+B\eta+C\mu, \\ d^2z_1 = A\gamma+B\zeta+C\nu, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(5.)\quad \begin{cases} A = d^2s+d^2\varrho-\varrho d\sigma^2, \\ B = d\sigma ds+2d\varrho d\sigma+\varrho d^2\sigma, \\ C = \varrho d\sigma d\tau. \end{cases}$$

Dividiren wir die Gleichungen (2.) durch dt^2, so erhalten wir die Componenten X, Y, Z der Kraft, welche die Bewegung des Punktes M auf der Fläche hervorbringt (seine Masse ist gleich 1 angenommen). Will man die Componenten dieser Kraft nach den drei Hauptrichtungen der Wendecurve im Punkte I haben, so sieht man leicht, dass sie durch die Formeln (5.) gegeben werden, und zwar ist $\frac{A}{dt^2}$ die Componente nach der Tangente IM, $\frac{B}{dt^2}$ die nach der Hauptnormale und $\frac{C}{dt^2}$ die nach der Binormale. Diese drei Componenten der Kraft werde ich mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnen, so dass

$$(6.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d^2\sigma}{dt^2}-\varrho\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2, \\ \mathfrak{B} = \frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}+2\frac{d\varrho}{dt}\cdot\frac{d\sigma}{dt}+\varrho\frac{d^2\sigma}{dt^2}, \\ \mathfrak{C} = \varrho\frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{d\tau}{dt}. \end{cases}$$

Die zwei ersten Componenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ geben eine Resultante T, welche in der Tangentialebene der Fläche liegt, die dritte $\mathfrak{C}$ steht darauf senkrecht und ist der Zwang oder der Widerstand der Fläche. Es ist nun zu bemerken, dass die Componenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ (also auch T) und die Geschwindigkeit v aus Grössen zusammengesetzt werden, die bei Biegung der Fläche unverändert bleiben. Es folgt daraus, dass bei beliebiger Biegung oder Abwickelung der Fläche dieselben Componenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dieselbe Bewegung des Punktes M auf der Deformationscurve seiner Bahn hervorbringen; nur die dritte Componente $\mathfrak{C}$ ändert sich bei der Biegung und verschwindet, wenn sich die Fläche auf einer Ebene ausbreitet.

Anmerkung. Dass diese Eigenschaft allgemein bei der Biegung jeder Fläche gilt, lässt sich aus den Fundamentalgleichungen der Flächen (dieses Journal, Bd. 88, S. 68) unmittelbar sehen.

Ich will nun die Bewegung untersuchen, bei der die von der Geraden IM beschriebene Fläche proportional zur Zeit ist.

Bezeichnet man das in der Zeit dt beschriebene Flächenelement mit dE, so ist

$$dE = \tfrac{1}{2}\varrho^2 d\sigma,$$

soll also $dE = \frac{1}{2}\varkappa dt$ (wo $\varkappa$ constant) sein, so muss

$$\varrho^2 d\sigma = \varkappa dt$$

oder

$$(7.)\qquad \varrho^2 \frac{d\sigma}{dt} = \varkappa$$

sein; daraus folgt

$$2\varrho \frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{d\varrho}{dt} + \varrho^2 \frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0.$$

Dann wird aber die in der Tangentialebene zur IM senkrecht stehende Componente $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} = \frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}$$

oder

$$\mathfrak{B} = \frac{ds}{d\sigma}\cdot\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2,$$

und da $\frac{ds}{d\sigma}$ der erste Krümmungsradius R der Wendecurve in I ist, so

haben wir

$$\mathfrak{B} = R\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2,$$

und mit Beachtung der Gleichung (7.) lässt sich $\mathfrak{B}$ in die Form bringen

$$\mathfrak{B} = \frac{\varkappa^2 R}{\varrho^4}, \tag{8.}$$

d. h.: „*Wenn bei der Bewegung des Punktes M auf irgend einer abwickelbaren Fläche die von ihm an die Wendecurve gezogene Tangente IM Flächenstücke beschreibt, die zur Zeit proportional sind, so ist die zu ihr senkrecht stehende und in der Tangentialebene liegende Componente der Kraft der vierten Potenz dieser Geraden umgekehrt und dem ersten Krümmungsradius der Wendecurve direct proportional.*“

Und umgekehrt, wird diese Bedingung erfüllt, so lässt sich die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes M so bestimmen, dass bei der so entstehenden Bewegung die von der Geraden IM beschriebene Fläche sich proportional der Zeit ändert.

In der That, sei $\mathfrak{B} = \frac{\varkappa^2 R}{\varrho^4}$, dann ist wegen der Gleichung (6.)

$$\frac{\varkappa^2 R}{\varrho^4} = \frac{d\sigma}{dt}\frac{ds}{dt} + 2\frac{d\varrho}{dt}\frac{d\sigma}{dt} + \varrho\frac{d^2\sigma}{dt^2}$$

oder

$$\frac{\varkappa^2 R}{\varrho^4} = \frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\left(\varrho^2\frac{d\sigma}{dt}\right)}{dt}. \tag{9.}$$

Man setze nun zur Abkürzung

$$\varrho^2\frac{d\sigma}{dt} = \psi,$$

dann lässt sich die Gleichung (9.) schreiben

$$\varkappa^2 R = \psi^2 R + \varrho^3\frac{d\psi}{dt}$$

oder

$$(\psi^2 - \varkappa^2)R + \tfrac{1}{2}\varrho\frac{d(\psi^2)}{d\sigma} = 0$$

oder auch

$$\psi^2 - \varkappa^2 + \tfrac{1}{2}\varrho\frac{d(\psi^2)}{ds} = 0;$$

daraus folgt

$$\log(\psi^2 - \varkappa^2) = -2\int\frac{ds}{\varrho},$$

und wenn man die Anfangswerthe von s und ψ mit mit s_0 und ψ_0 bezeichnet:

$$(10.)\qquad \psi^2-\varkappa^2 = (\psi_0^2-\varkappa^2)e^{-2\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varrho}}.$$

Nun ist das Integral $\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varrho}$, so lange der Punkt M die Wendecurve nicht trifft, offenbar stetig und endlich, wenn also der Anfangswerth ψ_0 gleich $\varkappa$ angenommen wird, so bleibt bei der Bewegung immer

$$\psi = \varkappa \quad \text{d. i.} \quad \varrho^2 d\sigma = \varkappa dt,$$

folglich ist die von der Tangente ϱ beschriebene Fläche der Zeit t proportional.

Der Anfangswerth ψ_0 von ψ hängt mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Punktes M und seine Anfangslage auf folgende Weise zusammen: Man kann das unendlich kleine Flächenelement dE, welches in der Zeit dt beschrieben wird, als Dreieck ansehen, dessen Basis ds, und dessen Höhe die vom Punkte I auf die Tangente der Bahn gezogene Normale p ist; folglich ist

$$dE = \tfrac{1}{2}p\,ds,$$

und

$$\frac{dE}{dt} = \tfrac{1}{2}p.v,$$

und da $\psi = 2\frac{dE}{dt}$ gesetzt worden ist, so kommt

$$\psi = p.v \quad \text{also} \quad \psi_0 = p_0 v_0.$$

Man muss also entweder die Constante $\varkappa$ in der Formel (8.) gleich dem Producte $p_0 v_0$ annehmen, oder (falls $\varkappa$ gegeben ist) die Anfangsgeschwindigkeit so bestimmen, dass $p_0 v_0 = \varkappa$ wird; dann wird immer $\psi = \varkappa$ bleiben (so lange der bewegliche Punkt die Wendecurve nicht trifft).

Es ist noch zu bemerken, dass die Voraussetzung

$$\varrho^2 d\sigma = \varkappa dt$$

für den Widerstand der Fläche folgenden Werth giebt

$$\mathfrak{S} = \frac{\varkappa^2}{\varrho^3}\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\varkappa^2}{\varrho^3}\cdot\frac{R}{T},$$

er ist also (falls die Proportionalität der Flächen besteht) umgekehrt proportional dem Kubus des Abstandes ϱ und direct proportional dem Verhältnisse $\frac{R}{T}$ beider Krümmungsradien der Wendecurve im Berührungspunkte I.

Diese Bedingung ist hinreichend, welche Werthe auch die Anfangselemente der Bewegung haben mögen, wenn nur die Fläche keine Ebene ist, denn aus der Gleichung

$$\frac{\varkappa^2}{\varrho^2}\frac{R}{T} = \varrho\frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{d\tau}{dt}$$

folgt, wenn $d\tau$ von Null verschieden ist, folgende

$$\varrho^2 d\sigma = \varkappa dt.$$

Die Bahn des Punktes M hängt von der Componente A ab: denn es ist nach Gleichung (6.)

$$\mathfrak{A} = \frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d^2\varrho}{dt^2}-\varrho\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2,$$

und da $\varrho^2 d\sigma = \varkappa dt$ ist, so können wir das Differential dt eliminiren; es ist zuerst

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dt} = R\frac{\varkappa}{\varrho^2},$$

folglich

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\varkappa^2}{\varrho^2}\cdot\frac{d\left(\frac{R}{\varrho^2}\right)}{d\sigma}.$$

Weiter ist

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{d\sigma}\cdot\frac{\varkappa}{\varrho^2} = -\varkappa\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\sigma}$$

und

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2}{\varrho^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\sigma^2}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (6.) ein, so erhalten wir

$$\text{(11.)}\qquad \mathfrak{A} = -\frac{\varkappa^2}{\varrho^2}\left\{\frac{1}{\varrho}+\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\sigma^2}-\frac{d\left(\frac{R}{\varrho^2}\right)}{d\sigma}\right\}.$$

Aus dieser Gleichung wird die Componente $\mathfrak{A}$ gefunden, wenn die Bahn gegeben ist, oder wird umgekehrt die Bahn bestimmt, wenn die Componente $\mathfrak{A}$ gegeben wird. Wie wir schon oben bemerkt haben, lässt sich diese Gleichung ohne Aenderung auf alle Biegungen der abwickelbaren Fläche ausdehnen, also auch auf die Ebene selbst. Wird $R=0$ vorausgesetzt (was nur dann eintreten kann, wenn die Fläche eine Ebene oder

eine Kegelfläche ist, so geht die Gleichung (11.) in die bekannte Gleichung der Centralbewegung über.

Um eine Anwendung von der Gleichung (11.) zu geben, wollen wir die Kraft aufsuchen, welche erforderlich ist, um den Punkt auf einer Evolvente der gegebenen Wendecurve zu bewegen.

Für die Componente $\mathfrak{A}$ finden wir aus der Gleichung (6.), da jetzt $s+\varrho$ gleich einer Constanten bleibt:

$$\mathfrak{A} = -\frac{x^2}{\varrho^3}.$$

Für die Componente $\mathfrak{B}$ haben wir schon den Werth (8.) gefunden

$$\mathfrak{B} = \frac{x^2 R}{\varrho^4}.$$

Die dritte Componente $\mathfrak{C}$ oder der Widerstand der abwickelbaren Fläche hat den Werth

$$\mathfrak{C} = \varrho\frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{x^2}{\varrho^3}\cdot\frac{d\tau}{d\sigma}$$

oder

$$\mathfrak{C} = \frac{x^2}{\varrho^3}\cdot\frac{R}{T},$$

worin T den zweiten Krümmungsradius der Wendecurve bedeutet.

Aus den Werthen der Componenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sieht man leicht, dass ihre Resultante F, welche in der Schmiegungsebene der Wendecurve liegt, in diesem Falle durch den Krümmungsmittelpunkt dieser Curve hindurchgeht: denn es ist

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = -\frac{\varrho}{R}$$

und das negative Zeichen von $\mathfrak{A}$ zeigt, dass sie von M nach I gerichtet ist.

Umgekehrt: Wenn die Projection F der Kraft auf die Schmiegungsebene der Wendecurve sich stets nach dem Krümmungsmittelpunkte derselben richtet und die Bahn eine Evolvente dieser Curve ist, so beschreibt die Tangente IM Flächenstücke, welche der Zeit t proportional sind, denn aus den Gleichungen

$$s+\varrho = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = -\frac{\varrho}{R}$$

folgt

$$\frac{d^2 s}{dt^2}+\frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0$$

und nach den Gleichungen (6.)

$$\mathfrak{A} = -\varrho\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2, \quad \mathfrak{B} = \frac{d\sigma}{dt}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\left(\varrho^2\frac{d\sigma}{dt}\right)}{dt},$$

folglich ist wegen der Richtung der Kraft F

$$-\varrho R\frac{d\sigma^2}{dt^2} + \frac{d\left(\varrho^2\frac{d\sigma}{dt}\right)}{dt} + \varrho\frac{d\sigma}{dt}\frac{d\varrho}{dt} = 0$$

oder $\left(\text{weil } R = \frac{d\varrho}{d\sigma} \text{ ist}\right)$

$$\frac{d\left(\varrho^2\frac{d\sigma}{dt}\right)}{dt} = 0,$$

folglich

$$\varrho^2 d\sigma = \varkappa dt.$$

Ist die Fläche eine Ebene, so schliessen wir folgenden Satz:

Wenn die Kraft stets durch den zweiten Krümmungsmittelpunkt der Bahn hindurchgeht, so beschreibt der erste Krümmungsradius derselben Flächen, welche der Zeit proportional sind.

Ueber die Form des Integrals der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p_0+p_1y+p_2y^2+p_3y^3}{q_0+q_1y}.$$

(Von Herrn *E. Haentzschel.*)

---

§ 1.

Die Differentialgleichung

$$\text{(I.)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p_0+p_1y+p_2y^2+p_3y^3}{q_0+q_1y}$$

hat die charakteristische Eigenschaft, durch die Transformation

$$\text{(1.)} \qquad y = \frac{b_0+b_1z}{c_0+c_1z},$$

wo die p_i, q_i, b_i, c_i wohlbestimmte differentiirbare, sonst aber beliebige Functionen von x sind, ihre Form nicht zu ändern. Demnach muss das allgemeine Integral von (I.) dieselbe Eigenschaft haben. Herr *Appell* (Journal de Liouville, 1889) hat die Gleichung (I.) durch die specielle Substitution

$$\text{(2.)} \qquad y = \frac{b_0-q_0z}{q_1z}, \quad \text{bez.} \quad z = \frac{b_0}{q_0+q_1y}$$

in die Gleichung

$$\text{(II.)} \qquad \frac{dz}{dx} = \pi_0+\pi_1z+\pi_2z^2+\pi_3z^3$$

überzuführen gelehrt, und im besonderen ergiebt die Rechnung, dass $\pi_0 = p_3b_0^3$, also für $p_3 = 0$ verschwindet. Mit der Integration der besonderen Gleichung

$$\text{(I}^a.) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p_0+p_1y+p_2y^2}{q_0+q_1y}$$

hängt also diejenige der Gleichung

$$\text{(II}^a.) \qquad \frac{dz}{dx} = \pi_1z+\pi_2z^2+\pi_3z^3$$

aufs innigste zusammen. Nun kann die Gleichung (I^a.) durch die Beziehungsgleichung

(3.) $$y = \varrho t + \sigma$$

in die andere

(I^α.) $$\frac{dt}{dx} = \frac{d_2}{d_0 + d_1 t}$$

transformirt werden, wobei sich die Grössen ϱ und σ als Functionen der Coefficienten p_i und q_i durch eine Quadratur ergeben. Herr *Painlevé* hebt in Folge dessen in seiner Preisschrift (Annales de l'École Normale Supérieure, 1891 und 1892) aus der allgemeinen Differentialgleichung (II.) die besondere (II^a.) heraus und fügt dazu noch als weiteren Typus von besonderer Art diejenigen Fälle der Gleichung (II.), in denen die π_i Constanten sind. Aber auch dieser zweite Typus lässt sich unter (II^a.) subsumiren, wenn man in (II.)

$$\pi_3 dx = d\xi \quad \text{und} \quad z - z_1 = \zeta$$

setzt, wo z_1 eine Wurzel der Gleichung: $z^3 + \frac{\pi_2}{\pi_3} z^2 + \frac{\pi_1}{\pi_3} z + \frac{\pi_0}{\pi_3} = 0$ bedeutet. Das Resultat ist demnach, dass die Gleichungen (I.) sich in zwei Gruppen theilen, je nachdem dieselben durch dic Transformation (1.) ihre Form bewahren oder durch eine solche in die specielle Form (I^a.) übergeführt werden können.

§ 2.

Mit der Gleichung (I^a.) für constante Werthe der p_i und q_i hat sich wohl zuerst *Jacobi*, mit einem anderen einfachen Falle derselben Gleichung später *Halphen* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, März 1879) beschäftigt. Herr *Roger Liouville* (C. R. 1886 und 1887, Journal de l'École Polytechnique 1889 und 1892) stellt darauf Integrabilitätsbedingungen für die Gleichung (II^a.) auf. Herr *Appell* (a. a. O.) leitet für (I^α.) vier integrable Fälle ab, combinirt (I^α.) mit der Transformation $z = \frac{d_1}{d_0 + d_1 t}$ und zeigt, dass die vier daraus hervorgehenden integrablen Fälle der Gleichung (II^a.) die von Herrn *Roger Liouville* aufgefundenen in sich schliessen. Herr *Elliot* (Annales de l'École Norm. Sup. 1890) knüpft an die Arbeit des Herrn *Appell* an, integrirt (I^a.) bei constanten Coefficienten und sucht die allgemeine Form

des Integrals dieser Gleichung zu ermitteln. Er findet als solche erstens $\left(\frac{A_1+y}{A_3+y}\right)^{h_1}\left(\frac{A_2+y}{A_3+y}\right)^{h_2} = C$ und zweitens $(A_1+y)^{h_1}(A_2+y)^{h_2}(A_3+y)^{h_3}(A_4+y)^{h_4} = C$, wo die A_i beliebige Functionen der Abhängigen x, die h_i und C Constanten bedeuten; jedoch genügt die zweite Form nur, wenn zwei gewisse am genannten Orte aufgestellte Bedingungsgleichungen erfüllt sind. An diese Arbeit schliesst sich endlich die Dissertation des Herrn *Güntsche* (Jena 1891) an, der die Gleichung $x^k \frac{dy}{dx} = \pi_0+\pi_1 y+\pi_2 y^2+\pi_3 y^3$, wo die π_i und k Constanten sind, integrirt und untersucht, ob etwa das allgemeine Integral von (I.) die von Herrn *Elliot* für (I^a.) ermittelten Formen hat, vorausgesetzt, dass auch C eine Function von x ist; aber er gelangt zu keinem entscheidenden Resultat.

Indem ich mir nun die Aufgabe stelle, *die allgemeine Form des Integrals von* (I.) *zu ermitteln,* knüpfe ich an diese Form die Forderungen, sie darf *erstens* weder trivial sein, noch dürfen *zweitens* Bedingungsgleichungen mit derselben verbunden sein, damit sie (I.) Genüge leistet, das Integral darf *drittens* durch die Transformation (1.) seine Form nicht ändern, dasselbe muss *viertens* die von den Herren *Elliot* und *Güntsche* wirklich integrirten Fälle als Sonderfälle in sich schliessen.

Wir haben *vier Formen* gefunden, die das Integral von (I.) anzunehmen im Stande ist, und unser Resultat wird ausserdem die Thatsache festzustellen erlauben, dass in sämmtlichen oben genannten Untersuchungen bisher nur solche Gleichungen (I.) bezw. (II.) integrirt worden sind, die durch die Transformation (1.) in Gleichungen von der Form (I^a.) bezw. (II^a.) übergeführt werden können.

§ 3.

Wir gehen von dem Ausdrucke aus

$$(4.)\qquad (\alpha_1+\beta_1 y)^{h_1}(\alpha_2+\beta_2 y)^{h_2}(\alpha_3+\beta_3 y)^{h_3} e^{-\int \frac{\alpha_0+\beta_0 y}{\alpha_3+\beta_3 y}dx} = ce^{\sigma},$$

wo die α_i, β_i und σ Functionen von x, die h_i und c Constanten bedeuten. Differentiiren wir (4.) logarithmisch, so folgt, dass dieser Ausdruck das Integral der Gleichung ist:

$$(5.)\qquad (q_0+q_1 y+q_2 y^2)\frac{dy}{dx} = p_0+p_1 y+p_2 y^2+p_3 y^3,$$

wo

$$(6.)\quad \begin{cases} q_0 = \beta_1 h_1 \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 h_2 \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 h_3 \alpha_1 \alpha_2, \\ q_1 = \alpha_1 \beta_2 \beta_3 (h_2 + h_3) + \alpha_2 \beta_3 \beta_1 (h_3 + h_1) + \alpha_3 \beta_1 \beta_2 (h_1 + h_2), \\ q_2 = \beta_1 \beta_2 \beta_3 (h_1 + h_2 + h_3), \\ p_0 = \sigma' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 - h_1 \alpha_1' \alpha_2 \alpha_3 - h_2 \alpha_2' \alpha_3 \alpha_1 - h_3 \alpha_3' \alpha_1 \alpha_2, \\ p_1 = \sigma'(\alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_1) - h_1 \alpha_1'(\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) - h_2 \alpha_2'(\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) \\ \qquad - h_3 \alpha_3'(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - h_1 \beta_1' \alpha_2 \alpha_3 - h_2 \beta_2' \alpha_1 \alpha_3 - h_3 \beta_3' \alpha_1 \alpha_2 \\ \qquad\qquad + \alpha_0(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + \beta_0 \alpha_1 \alpha_2, \\ p_2 = \sigma'(\beta_1 \beta_2 \alpha_3 + \beta_3 \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \beta_3 \alpha_1) - h_1 \beta_1'(\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) - h_2 \beta_2'(\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) \\ \qquad - h_3 \beta_3'(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - h_1 \alpha_1' \beta_2 \beta_3 - h_2 \alpha_2' \beta_1 \beta_3 - h_3 \alpha_3' \beta_1 \beta_2 \\ \qquad\qquad + \beta_0(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + \alpha_0 \beta_1 \beta_2, \\ p_3 = \sigma' \beta_1 \beta_2 \beta_3 + \beta_0 \beta_1 \beta_2 - h_1 \beta_1' \beta_2 \beta_3 - h_2 \beta_2' \beta_3 \beta_1 - h_3 \beta_3' \beta_1 \beta_2 \end{cases}$$

ist. Wenn daher $q_2 = 0$ ist, so ist der Ausdruck (4.) ein Integral von (I.). Dies tritt ein erstens für $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, zweitens für $\beta_3 = 0$, doch ist die sich hieran knüpfende Integralform ein besonderer Fall der vorigen, drittens für $\beta_1 = 0$, was $p_3 = 0$ nach sich zieht, und viertens für $\beta_2 = 0$, wofür auch $p_3 = 0$ ist. Folglich ist

$$\text{(III.)}\qquad \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 y}{\alpha_3 + \beta_3 y}\right)^{h_1} \left(\frac{\alpha_2 + \beta_2 y}{\alpha_3 + \beta_3 y}\right)^{h_2} e^{-\int \frac{\alpha_0 + \beta_0 y}{\alpha_3 + \beta_3 y} dx} = c e^{\sigma}$$

das Integral von (I.); die Coefficienten dieser Differentialgleichung sind durch (6.) definirt, wenn dort überall

$$(7.)\qquad h_3 = -(h_1 + h_2)$$

gesetzt wird.

Für $\beta_3 = 0$ kann unbeschadet der Allgemeinheit $\alpha_3 = 1$ und $\alpha_0 = 0$ angenommen werden, daher ist

$$\text{(III}^{a}.)\qquad (\alpha_1 + \beta_1 y)^{h_1} (\alpha_2 + \beta_2 y)^{h_2} e^{-\int \beta_0 y\, dx} = c e^{\sigma}$$

das Integral von (I.), wenn

$$(8.)\quad \begin{cases} q_0 = \beta_1 h_1 \alpha_2 + \beta_2 h_2 \alpha_1, \\ q_1 = \beta_1 \beta_2 (h_1 + h_2), \\ p_0 = \sigma' \alpha_1 \alpha_2 - h_1 \alpha_1' \alpha_2 - h_2 \alpha_2' \alpha_1, \\ p_1 = \sigma'(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - h_1 \alpha_1' \beta_2 - h_2 \alpha_2' \beta_1 - h_1 \beta_1' \alpha_2 - h_2 \beta_2' \alpha_1 + \beta_0 \alpha_1 \alpha_2, \\ p_2 = \sigma' \beta_1 \beta_2 - h_1 \beta_1' \beta_2 - h_2 \beta_2' \beta_1 + \beta_0(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1), \\ p_3 = \beta_0 \beta_1 \beta_2 \end{cases}$$

ist.

Nimmt man $h_1+h_2=0$ an, so ergiebt sich hieraus, dass

$$(\text{III}^a.)\qquad \left(\frac{\alpha_1+\beta_1 y}{\alpha_2+\beta_2 y}\right)^{h_1} e^{-\int \beta_0 y dx} = ce^{\sigma}$$

das Integral der Gleichung

$$(9.)\quad \begin{cases} h_1(\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1)\dfrac{dy}{dx} = (\sigma'\alpha_1\alpha_2+h_1(\alpha_1\alpha_2'-\alpha_1'\alpha_2)) \\ \qquad +(\sigma'(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+h_1(\alpha_1\beta_2'-\alpha_1'\beta_2+\alpha_2'\beta_1-\alpha_2\beta_1')+\beta_0\alpha_1\alpha_2)y \\ \qquad\qquad -(\sigma'\beta_1\beta_2+h_1(\beta_1\beta_2'-\beta_2\beta_1')+\beta_0(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1))y^2+\beta_0\beta_1\beta_2 y^3 \end{cases}$$

ist; für $\beta_0=0$ haben wir also das Integral einer *Riccati*schen Gleichung.

§ 4.

Sei jetzt $\beta_1=0$, und nehmen wir dazu $\alpha_1=1$ an, so ist

$$(\text{IV}^a.)\qquad (\alpha_2+\beta_2 y)^{h_2}(\alpha_3+\beta_3 y)^{h_3} e^{-\int \frac{\alpha_0+\beta_0 y}{\alpha_3+\beta_3 y}dx} = ce^{\sigma}$$

das Integral der Gleichung ($\text{I}^a.$), wenn

$$(10.)\quad \begin{cases} q_0 = \beta_2 h_2\alpha_3+\beta_3 h_3\alpha_2, \\ q_1 = \beta_2\beta_3(h_2+h_3), \\ p_0 = \sigma'\alpha_2\alpha_3+\alpha_0\alpha_2-h_2\alpha_2'\alpha_3-h_3\alpha_3'\alpha_2, \\ p_1 = \sigma'(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)-h_2\alpha_2'\beta_3-h_3\alpha_3'\beta_2-h_2\beta_2'\alpha_3-h_3\beta_3'\alpha_2+\alpha_0\beta_2+\beta_0\alpha_2, \\ p_2 = \sigma'\beta_2\beta_3-h_2\beta_2'\beta_3-h_3\beta_3'\beta_2+\beta_0\beta_2; \end{cases}$$

unsere Integralform ist also allgemeiner als die des Herrn *Elliot*, sie hat einen *transcendenten* Character.

Unsere Form ($\text{IV}^a.$) selbst erscheint nun als ein Sonderfall derjenigen, die aus (4.) hervorgeht, wenn man $h_1+h_2+h_3=0$, also

$$(11.)\qquad h_1 = -(h_2+h_3)$$

setzt; denn man erhält alsdann

$$(\text{IV}.)\qquad \left(\frac{\alpha_2+\beta_2 y}{\alpha_1+\beta_1 y}\right)^{h_2}\left(\frac{\alpha_3+\beta_3 y}{\alpha_1+\beta_1 y}\right)^{h_3} e^{-\int \frac{\alpha_0+\beta_0 y}{\alpha_3+\beta_3 y}dx} = ce^{\sigma}$$

und hat nur $\beta_1=0$ zu setzen, um ($\text{IV}^a.$) zu bekommen. Die zu (IV.) gehörigen Coefficienten von (I.) folgen aus (6.) unter Berücksichtigung von (11.).

Bezeichnet man die Transformation (1.) als eine ***Inversion***, so ergiebt sich *ein fundamentaler Unterschied zwischen* ($\text{III}^a.$) *und* ($\text{IV}^a.$); die einfache Form ($\text{III}^a.$), die nicht weiter reducirbar ist, genügt schon (I.); die einfache Form ($\text{IV}^a.$) genügt nur der Gleichung ($\text{I}^a.$); die durch Inversion entstehen-

den Formen (III.) und (IV.) genügen natürlich beide der Gleichung (I.). Setzt man in (III^a.): $h_1+h_2=0$, so geht (III^α.) hervor, welches der *Appell*schen Gleichung (9.) bezw. (III.) genügt, — setzt man in (IV^a.) ganz entsprechend: $h_1+h_3=0$, so geht

$$(IV^\alpha.)\qquad \left(\frac{\alpha_2+\beta_2 y}{\alpha_3+\beta_3 y}\right)^{h_2} e^{-\int\frac{\alpha_0+\beta_0 y}{\alpha_3+\beta_3 y}dx} = ce^\sigma$$

hervor, welches nur die *Riccati*sche Gleichung befriedigt.

In Parallele mit (IV^a.) tritt die aus (III^a.) entspringende Form für $\beta_0=0$:

$$(III^\alpha.)\qquad (\alpha_1+\beta_1 y)^{h_1}(\alpha_2+\beta_2 y)^{h_2} = ce^\sigma,$$

die, wie (8.) lehrt, der Gleichung (I^a.) genügt; durch Inversion entsteht daraus die Form des Herrn *Güntsche* (§ 3 der Dissertation desselben), die natürlich einer besonderen Gleichung (I.) genügt, die wieder in (I^a.) übergeht unter der Annahme $\sigma=$ constans, uns also die erste *Elliot*sche Form liefert.

Nimmt man ganz allgemein $\sigma=$ constans an, setzt desgleichen β_1, β_2 und β_3 Constanten gleich und endlich noch $\beta_0=0$ und $\alpha_0=1$, so ist p_3 in (6.) gleich Null, daher sind

$$(III^b.)\qquad \left(\frac{\alpha_1+y}{\alpha_3+y}\right)^{h_1}\left(\frac{\alpha_2+y}{\alpha_3+y}\right)^{h_2} e^{-\int\frac{dx}{\alpha_3+y}} = C,$$

$$(IV^b.)\qquad \left(\frac{\alpha_2+y}{\alpha_1+y}\right)^{h_2}\left(\frac{\alpha_3+y}{\alpha_1+y}\right)^{h_3} e^{-\int\frac{dx}{\alpha_3+y}} = C_1$$

Integrale der Gleichung (I^a.), wobei (7.) bez. (11.) berücksichtigt ist; entnimmt man unter derselben Voraussetzung q_1 aus (6.) und setzt es gleich Null, so gehen die soeben hingeschriebenen Formen in Integrale der *Riccati*schen Gleichung über.

Aehnlich verhält es sich bei $\sigma=$ constans; α_1, α_2, α_3, β_0 gleich Constanten, $\alpha_0=0$ und $y=\frac{1}{u}\cdot$

§ 5.

Zwei neue Integralformen, die aber nur auf derselben Stufe stehen wie die Form (IV.) erhalten wir, wenn wir von dem Ausdruck ausgehen:

$$(12.)\qquad (\alpha_1+\beta_1 y)^{h_1}(\alpha_3+\beta_3 y)^{h_3} e^{-\frac{\alpha_0+\beta_0 y}{\alpha_3+\beta_3 y}} = ce^\sigma,$$

wo die α_i, β_i und σ Functionen von x, die h_i und c Constanten bedeuten. Differentiiren wir (12.) logarithmisch, so ergiebt sich, dass dieser Ausdruck das Integral der Gleichung (5.) ist, wo

$$(13.)\quad \begin{cases} q_0 = \alpha_3(h_1\alpha_3\beta_1+h_3\alpha_1\beta_3)-\alpha_1(\alpha_3\beta_0-\alpha_0\beta_3) \\ q_1 = \alpha_3\beta_1\beta_3(h_1+h_3)+\beta_3(h_1\alpha_3\beta_1+h_3\alpha_1\beta_3)-\beta_1(\alpha_3\beta_0-\alpha_0\beta_3) \\ q_2 = \beta_1\beta_3^2(h_1+h_3) \\ p_0 = \sigma'\alpha_1\alpha_3^2-h_1\alpha_1'\alpha_3^2-h_3\alpha_3'\alpha_1\alpha_3+\alpha_1(\alpha_3\alpha_0'-\alpha_0\alpha_3') \\ p_1 = \sigma'\beta_1\alpha_3^2+2\sigma'\alpha_1\alpha_3\beta_3-h_1\beta_1'\alpha_3^2-2h_1\alpha_1'\alpha_3\beta_3-h_3\alpha_3'(\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3)-h_3\beta_3'\alpha_1\alpha_3 \\ \qquad +\alpha_1(\alpha_3\beta_0'-\alpha_3'\beta_0+\alpha_0'\beta_3-\alpha_0\beta_3')+\beta_1(\alpha_3\alpha_0'-\alpha_0\alpha_3') \\ p_2 = \sigma'\alpha_1\beta_3^2+2\sigma'\beta_1\beta_3\alpha_3-h_1\alpha_1'\beta_3^2-2h_1\beta_1'\alpha_3\beta_3-h_3\beta_3'(\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3)-h_3\alpha_3'\beta_1\beta_3 \\ \qquad +\beta_1(\alpha_3\beta_0'-\alpha_3'\beta_0+\alpha_0'\beta_3-\alpha_0\beta_3')+\alpha_1(\beta_3\beta_0'-\beta_0\beta_3') \\ p_3 = \sigma'\beta_1\beta_3^2-h_1\beta_1'\beta_3^2-h_3\beta_3'\beta_1\beta_3+\beta_1(\beta_3\beta_0'-\beta_0\beta_3') \end{cases}$$

ist. Wenn daher $q_2=0$ ist, so ist (12.) ein Integral von (I.). Dies tritt ein erstens für $(h_1+h_3)=0$, zweitens für $\beta_1=0$, drittens für $\beta_3=0$; die beiden letzten Annahmen ziehen $p_3=0$ nach sich.

Ist $h_1+h_3=0$, also

$$(14.)\qquad h_3 = -h_1,$$

so ist

$$(\text{V.})\qquad \left(\frac{\alpha_1+\beta_1 y}{\alpha_3+\beta_3 y}\right)^{h_1} e^{-\frac{\alpha_0+\beta_0 y}{\alpha_3+\beta_3 y}} = ce^{\sigma}$$

ein Integral von (I.). Da aber diese Form aus der einfacheren

$$(\text{V}^{\text{a}}.)\qquad (\alpha_1+\beta_1 y)^{h_1} e^{-\beta_0 y} = ce^{\sigma}$$

durch Inversion hervorgegangen ist, (V^a.) aber, da $\beta_3=0$, nur der Differentialgleichung (I^a.) genügt, so ist (V.) nur ein Integral einer solchen Gleichung (I.), die durch Inversion auf (I^a.) zurückgeführt werden kann; sie tritt also in Parallele mit (IV.), und ein gleiches gilt von (VI.), das aus (12.) entsteht, wenn man

$$(15.)\qquad h_1 = -h_3$$

setzt. Also

$$(\text{VI.})\qquad \left(\frac{\alpha_3+\beta_3 y}{\alpha_1+\beta_1 y}\right)^{h_3} e^{-\frac{\alpha_0+\beta_0 y}{\alpha_3+\beta_3 y}} = ce^{\sigma}$$

ist ein Integral von (I.), welches aus der einfacheren Form

$$(\text{VI}^{\text{a}}.)\qquad (\alpha_3+\beta_3 y)^{h_3} e^{\frac{\alpha_0+\beta_0 y}{\alpha_3+\beta_3 y}} = ce^{\sigma},$$

die nur (I^a.) befriedigt, da $\beta_1 = 0$ ist, durch Inversion entstanden ist. Die Integralformen (V.) und (VI.) umfassen im besonderen solche Fälle, wo die rechte Seite von (5.), gleich Null gesetzt, also $p_0+p_1y+p_2y^2+p_3y^3 = 0$, Doppelwurzeln enthält.

Nimmt man mit der Differentialgleichung (5.), in der aber $q_2 = 0$ sei, die *Appell*sche Transformation (2.) vor, indem man q_0 und q_1 aus (6.) bez. (13.) entnimmt, so erhält man die *Appell*sche Gleichung (II.), für welche aus (III.) bis (VI.) mit Rücksicht auf (2.) die zugehörigen Integralformen folgen; ist dann noch $\pi_3 = 0$, so gehören die letzteren gewissen *Riccati*schen Differentialgleichungen an.

Note zu der im Bande 83 p. 13 sqq. dieses Journals enthaltenen Arbeit: sur quelques propriétés etc.; extrait d'une lettre adressée à M. *Hermite*.

(Von *L. Fuchs.*)

Die folgende Notiz enthält einige Ausführungen der in meinem an Herrn *Hermite* gerichteten Briefe (d. J. Bd. 83 p. 13 sqq.) skizzirten Grundlage der Modulfunction, wie ich sie in meinen Vorlesungen zu geben pflege. Zur Mittheilung derselben werde ich nicht nur durch das allgemeine Interesse, welches gegenwärtig die Theorie der Modulfunctionen gefunden, veranlasst, sondern auch weil das von mir angewendete Verfahren einer Verallgemeinerung fähig ist zur Entscheidung der Frage, wann die durch Umkehrung von Quotienten von Integralen linearer Differentialgleichungen entstehenden Functionen eindeutig werden.

Die oben citirte Arbeit aus dem 83. Bande dieses Journals werde ich der Kürze halber mit dem Zeichen B. citiren.

1.

Wie in B. sei

$$(1.)\qquad \eta_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \quad \eta_2 = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}$$

und es werde

$$(2.)\qquad \mathsf{H} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

gesetzt. Wir zerschneiden die Ebene T der complexen Variablen u durch einen längs der realen Axe von $u=0$ über $u=1$ ins Unendliche geführten Schnitt, und bezeichnen die so erhaltene u-Ebene mit T', so wie mit $\eta_1^{(0)}$, $\eta_2^{(0)}$ die in T' gültigen Zweige der Functionen η_1, η_2 wie sie in B. vermittelst

der Differentialgleichung

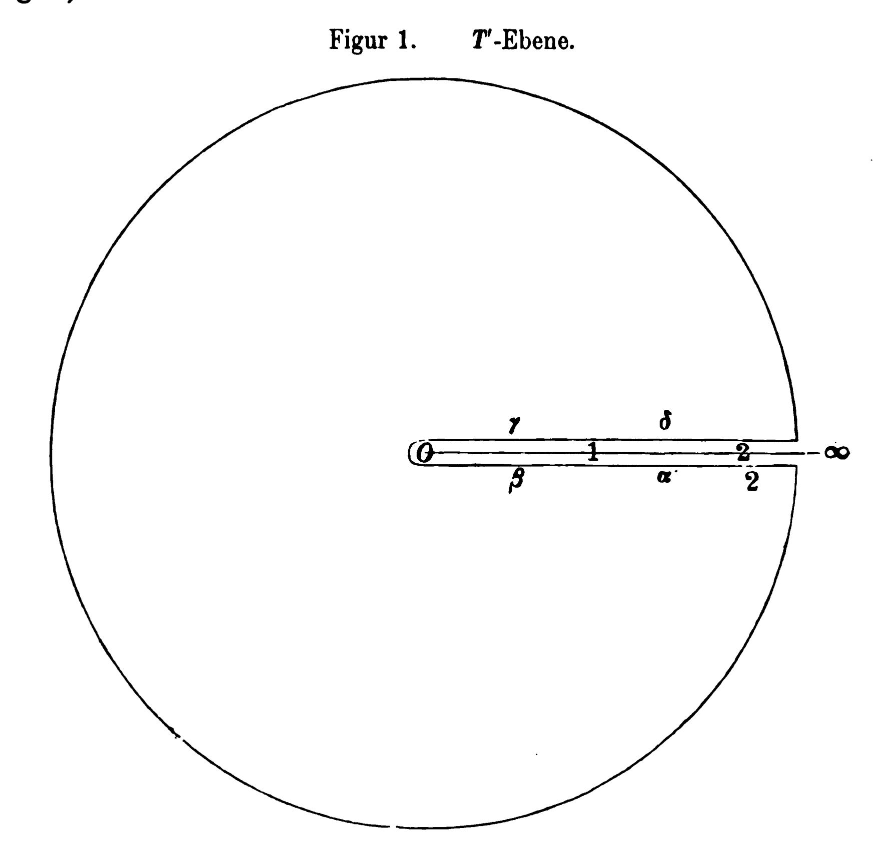
$$(3.)\qquad 2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2}+2(2u-1)\frac{d\eta}{du}+\tfrac{1}{2}\eta = 0,$$

welcher η_1, η_2 genügen, daselbst durch die Relationen (B.), (C.), (E.) definirt worden sind. Ferner sei

$$(2^a.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{\eta_2^{(0)}}{\eta_1^{(0)}}.$$

Die Begrenzung Γ der T'-Ebene besteht aus den beiden Ufern des Schnittes (0, 1, ∞) und aus einem um $u = 0$ beschriebenen unendlich grossen Kreise $\mathfrak{K}$. (S. Fig. 1).

Figur 1. T'-Ebene.



Wir wollen diese Begrenzung mit Hülfe der Gleichung (2ª.) auf die H-Ebene abbilden. (S. Fig. 2).

In dem Theile $(\infty, \alpha, 1)$ von Γ gilt für H_0 die Gleichung

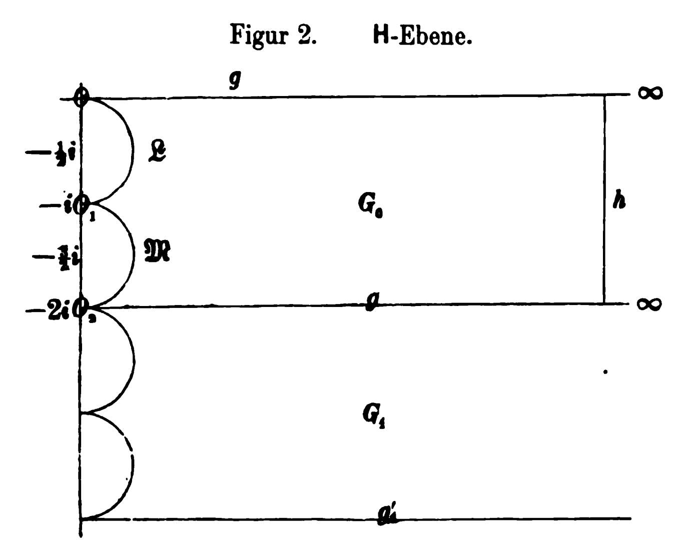
$$(4.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{1}{\pi}\cdot A,$$

wenn wir

(4ᵃ.) $$A = -\left[H_\infty(u)+\log\frac{1}{u}\right]$$

setzen. (S. B. p. 24 Gl. 3.)

Figur 2. H-Ebene.



Von den mehrdeutigen Ausdrücken $\log\frac{1}{u}$, $\log(u-1)$ und $\log u$ in den Gleichungen (1.), (2.), (3.) von B. p. 24 können wir einen, z. B. $\log\frac{1}{u}$, willkürlich fixiren, während die beiden anderen alsdann durch stetige Fortsetzung von H_0 in T' sich von selbst bestimmen.

Es sei daher $\log\frac{1}{u}$ längs $(\infty, \alpha, 1)$ ***real gewählt,*** so sind A und H_0 für dieses Intervall ebenfalls real, weil (s. B. p. 16) $v_{\infty 1}^2$, folglich auch $\mathsf{H}_\infty(u)$ für reale Werthe von u real ist. Aus der Gleichung

(5.) $$\frac{dA}{du} = -\frac{d}{du}\left[\frac{v_{\infty 2}}{v_{\infty 1}}\right] = \frac{1}{v_{\infty 1}^2;\; u(u-1)}$$

(s. B. p. 18 Gl. (C.) und p. 20) ergiebt sich, dass $\frac{dA}{du}$ längs $(\infty, \alpha, 1)$ ***stets positiv*** ist, weil nach B. p. 16 Gl. (3.) $v_{\infty 1}^2$ dieselbe Eigenschaft hat.

Während also u die Bahn $(\infty, \alpha, 1)$ durchwandert, nimmt H_0 fortwährend ab.

Für $u = \infty$ ist H_0 ein positiver unendlich grosser Werth, während H_0 für $u = 1$ verschwindet (s. B. p. 23 Gleichung (β.)).

Es entsprechen sich also die Punkte der Bahnen $(\infty, \alpha, 1)$ ***von*** u ***und*** $(\infty, 0)$ (g in Fig. 2) ***im positiven Theile der realen*** H-***Axe gegenseitig eindeutig.***

Für den Theil $(2, \alpha, 1)$ der realen u-Axe gilt neben der Gleichung (4.) auch die Gleichung

(6.) $$\mathsf{H}_0 = \frac{\pi}{-H_1(u)-\log(u-1)}$$

(s. B. p. 24 Gl. (2.)).

Da v_{11}^2 folglich auch $H_1(u)$ für reale Werthe von u real ist (s. B. p. 16), und da H_0, wie oben gezeigt, in dem genannten Intervalle real ist, so ergiebt die Gleichung (6.), dass wir längs (2.α.1) den Ausdruck $\log(u-1)$ *real* annehmen müssen. Setzen wir $\log(u-1)$ längs eines Halbkreises um $u=1$ von der Strecke (2, α, 1) nach der Strecke (1, β, 0) fort, so wird in letzterer Strecke

$$(6^a.)\qquad \log(u-1) = (\log(1-u))-\pi i,$$

wo $(\log(1-u))$ *real* zu nehmen ist.

Sei

$$(7.)\qquad B = -[H_1(u)+(\log(1-u))],$$

so ist längs (1, β, 0)

$$(8.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{\pi}{B+\pi i}.$$

Nach B p. 23 Gl. (β.) ist für $u=0$, $B=0$, und für $u=1$, $B=\infty$.

Nun ist

$$(5^a.)\qquad \frac{dB}{du} = -\frac{d}{du}\left[\frac{v_{12}}{v_{11}}\right] = \frac{1}{u(1-u)v_{11}^2}$$

(s. B. p. 17 Gl. (B.), p. 20 Gl. (D.)). Es wird also $\frac{dB}{du}$ zwischen 1 und 0 positiv bleiben, und daher *B ununterbrochen von ∞ bis 0 abnehmen,* während u die Bahn (1.β.0) beschreibt.

Aus der Gleichung (8.) ergiebt sich daher, dass H_0 in der H-Ebene einen nach der positiven Seite gelegenen Halbkreis $\mathfrak{L}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $(0, -\frac{1}{2})$ beschreibt, während u die Bahn (1.α.0) durchläuft.

Die Punkte der Bahnen (1, β, 0) *und* $\mathfrak{L}$ *entsprechen sich gegenseitig eindeutig.*

Für die Bahn (1, β, 0) gilt neben (8.) noch die Gleichung

$$(9.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{H_0(u)-\log u}{\pi+i[H_0(u)-\log u]}$$

(s. B. p. 24 Gl. (11.)).

Sei

$$(10.)\qquad H_0(u)-\log u = \pi C,$$

so wird aus der Gleichung (9.):

$$(9^a.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{C}{1+iC}.$$

Da im reciproken Werthe von H_0 nach Gl. (8.) der Coefficient von i con-

stant sein muss, so ist erforderlich, ***dass*** $\log u$ ***längs*** $(1, \beta, 0)$ ***real gewählt werde.*** Den Werth von $\log u$ längs der Strecke $(0, \gamma, 1)$ erhalten wir, indem wir diese Function längs eines um $u = 0$ führenden Kreises von der Seite $(1, \beta, 0)$ nach der Seite $(0, \gamma, 1)$ fortsetzen, also $(\log u) - 2\pi i$, wo $(\log u)$ real ist. Demnach ist für die Bahn $(0, \gamma, 1)$

$$\mathsf{H}_0 = \frac{C+2i}{-1+iC}. \tag{11.}$$

Nun ist

$$\frac{dC}{du} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{du}\left(\frac{v_{02}}{v_{01}}\right) = \frac{1}{\pi v_{01}^2 u(u-1)} \tag{5^b.}$$

(s. B. p. 20 Gl. (10.)).

Da $\log u$ auf der Bahn $(1, \beta, 0)$ real ist, so ist C ebenso wie v_{01} auf derselben Strecke real, und es ist $\frac{dC}{du}$ zwischen 0 und 1 fortwährend negativ. Nach B. p. 23 Gl. $(\beta.)$ ist für $\mathsf{H}_0 = 0$ $u = 1$, also nach Gl. (9^a.) $C = 0$. Ebenso folgt daraus, dass für $u = 0$ $\mathsf{H}_0 = -i$, für denselben Werth von u $C = \infty$. Es nimmt daher C ***ununterbrochen von*** ∞ ***bis*** 0 ***ab,*** während u die Strecke $(0, \gamma, 1)$ durchläuft. Die Gleichung (11.) lehrt daher, dass H_0 in der H-Ebene einen nach der positiven Seite der realen Axe gelegenen Halbkreis $\mathfrak{M}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $(0, -\frac{3}{2})$ beschreibt, während u die Bahn $(0, \gamma, 1)$ durchläuft. *Die Punkte der Bahnen* $(0, \gamma, 1)$ ***und*** $\mathfrak{M}$ ***entsprechen einander gegenseitig eindeutig.*** Wenn u die Strecke $(1, \delta, \infty)$ zurücklegt, so gilt für H_0 wieder die Gleichung

$$\mathsf{H}_0 = -\frac{1}{\pi}\left[H_\infty(u) + \log\frac{1}{u}\right]. \tag{4^b.}$$

Während längs $(\infty, \alpha, 1)$, $\log\frac{1}{u}$ real war, liefert die Fortsetzung von $\log\frac{1}{u}$ längs eines um $u = \infty$ führenden Kreises von der Seite $(\infty, \alpha, 1)$ nach der Seite $(1, \delta, \infty)$ für diese Function längs $(1, \delta, \infty)$ zu dem Werthe $\left(\log\frac{1}{u}\right) + 2\pi i$, wo wiederum $\left(\log\frac{1}{u}\right)$ real ist. Die Gleichung (4^b.) wird daher nach Gleichung (4^a.)

$$\mathsf{H}_0 = \frac{1}{\pi}A - 2i. \tag{4^c.}$$

Da nach dem Obigen A real ist und *fortwährend wachsend* von 0 bis ∞ sich bewegt, während u die Bahn $(1, \delta, \infty)$ beschreibt, so wird demnach H_0 die im Abstande -2 zur realen H-Axe parallele und nach der positiven

Seite derselben bis ins Unendliche verlaufende geradlinige Bahn g' durchwandern, während u den Weg $(1, \delta, \infty)$ beschreibt.

Die Punkte dieser Bahnen entsprechen sich wiederum gegenseitig eindeutig.

Beschreibt endlich v den Kreis $\mathfrak{K}$ mit dem unendlich grossen Radius R, so durchläuft H_0 nach Gl. (4^c.) eine Bahn, welche durch die Gleichung

$$(12.)\qquad \mathsf{H}_0 = -\frac{1}{\pi}\{-4\log 2+2\pi i-\log R-\varphi i\}$$

dargestellt wird, wenn $u = Re^{\varphi i}$.

Wenn φ von 0 bis 2π geht, so beschreibt H_0 in unendlich grossem positiven Abstande von dem Nullpunkte der H-Ebene, nämlich $\frac{4\log 2+\log R}{\pi}$ eine Parallele h zur lateralen H-Axe, von g' beginnend und in g endigend.

2.

Wir wollen das von den Linien g, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, g', h abgegrenzte Gebiet der H-Ebene mit G_0 bezeichnen.

Den Werthen u der T-Ebene, deren Modul sehr gross, entsprechen nach den Gleichungen (4^b.) und (12.) Werthe H_0 *innerhalb* G_0 in kleinem Abstande von h, s. B. p. 24, und es findet zwischen diesen Werthen die Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{1}{u} = 16e^{-\pi\mathsf{H}_0}+\varphi(e^{-\pi\mathsf{H}_0})$$

statt, wo $\varphi(q)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von q fortschreitende Reihe bedeutet (s. B. p. 25 Gl. (2.)).

Setzen wir die durch die Gleichung (1.) definirte Function u von H in der nach der positiven Seite der realen Axe gelegenen Halbebene der Variablen H gemäss der Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{du}{d\mathsf{H}} = \frac{u(u-1)\eta_1^2}{\pi}$$

fort, so können wir für einen endlichen, ausserhalb der lateralen Axe gelegenen Werth von H nicht zu einem der Werthe $u = 0,\ 1,\ \infty$ gelangen, da gemäss der Gleichung

$$(3.)\qquad \mathsf{H} = \frac{\eta_2}{\eta_1},$$

welche sich mit der functionalen Beziehung (2.) deckt, für $u = 0$, $u = 1$ der Punkt H auf die laterale Axe entfällt, und für $u = \infty$ der Punkt H entweder ebenfalls auf die laterale H-Axe entfällt oder nach der positiven Seite der realen Axe ins Unendliche rückt (s. B. p. 23).

Wir können aber bei der Fortsetzung nach Gl. (2.) für einen endlichen ausserhalb der lateralen Axe gelegenen Werth von H auch nicht zu einem von $u = 0$, 1, ∞ verschiedenen Werth $u = \alpha$ gelangen, für den $\eta_1 = 0$. Denn da für $u = \alpha$ bekanntlich nicht zugleich $\eta_2 = 0$ sein könnte, so müsste für $u = \alpha$, H unendlich werden.

Dem Fundamentaltheorem der Theorie der Differentialgleichungen zu Folge wird daher *u eine eindeutige Function von H in dem ganzen Gebiete der letzteren Variablen sein, welches nach der positiven Seite der realen Axe gelegen ist* (s. B. p. 26).

Das Gebiet der Variablen u, welches durch die so definirte Function u von H als Abbildung des Gebietes G_0 hergeleitet wird bedeckt die ganze T'-Ebene.

Denn wäre ein Theil U der T'-Ebene von dieser Abbildung ausgeschlossen, so könnte seine Begrenzung Γ nicht Punkten des Inneren von G_0 entsprechen, weil in der Umgebung jeder Stelle H_0' im Inneren von G_0 die Function u eindeutig, endlich und stetig ist, also der Umgebung von $\mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_0'$ die volle Umgebung des entsprechenden Punktes $u = u'$ entsprechen würde.

Wegen der Eindeutigkeit der Function u von H in G_0 kann aber u für eine Stelle H' auf g, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, g' nur zu dem einen Werthe u' resp. der Theile $(\infty, \alpha, 1)$, $(1, \beta, 0)$, $(0, \gamma, 1)$, $(1, \delta, \infty)$ der realen Axe gelangen, welcher bei der obigen Construction des Gebietes G_0 den Werth H_0' lieferte. Für Punkte H_0 auf h müsste aber u unendlich gross sein. Demnach müsste die Begrenzung Γ von U, so weit sie sich im Endlichen befindet, aus Theilen der realen u-Axe bestehen. Da aber die Coefficienten der Reihen $H_0(u)$, $H_1(u)$, $H_\infty(u)$ real sind, so ergeben die Gleichungen (4.) und (4^c.) vor. No., dass in der Nähe des Theiles $(1, \infty)$ der realen u-Axe *zu beiden Seiten* die zugehörigen Werthe H_0 *im Inneren* von G_0, und zwar resp. von g und g' gelegen sind. Ebenso ergeben die Gleichungen (8.) und (11.) voriger No., dass in der Nähe des Theiles (0 1) der realen u-Axe *zu beiden Seiten* die zugehörigen Werthe von H_0 *im Inneren* von G_0 resp. an $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ gelegen sind.

Demnach kann es kein Gebiet U der Variablen u geben, welches

bei der Abbildung von G_0 vermittelst der eindeutigen Function u von H ausgeschlossen ist.

Die Abbildung des Gebietes G_0 vermittelst der Function u von H auf die u-Ebene bedeckt dieselbe nur einfach.

Dieses folgt daraus, dass nach den Grundsätzen der Theorie der linearen Differentialgleichungen die Integrale der Gleichung (3.) No. 1, folglich auch H_0 in der T'-Ebene eindeutige Functionen von u sind.

Die Ebene T' und das Gebiet G_0 sind demnach conforme Abbildungen von einander.

3.

Irgend ein Zweig H hat die Form

$$\text{(1.)} \qquad \mathsf{H} = \frac{\nu i+\varrho \mathsf{H}_0}{\lambda+\mu i \mathsf{H}_0},$$

wo λ, μ, ν, ϱ reale ganze Zahlen sind, welche der Bedingung

$$\text{(2.)} \qquad \lambda\varrho+\mu\nu = 1$$

genügen, und wo überdies λ, ϱ ungerade Zahlen, μ, ν gerade Zahlen bedeuten. (B. p. 22.)

Da nach voriger No. allen Werthen u in T' nur Werthe H_0 mit positivem realen Theile entsprechen, so ergiebt sich nach dem Satze (B. p. 24), *dass alle Werthe H nach der positiven Seite der realen H-Axe gelegen sind.*

Da, wie schon oben bemerkt, die Gleichungen (2.) und (3.) voriger No. dieselbe functionale Beziehung ausdrücken, *so ist eine Fortsetzung der für die Werthe H mit positivem realen Theile definirten Function u vermittelst der Differentialgleichung* (2.) *voriger No. über die laterale H-Axe hinaus nicht möglich.*

Seien H und H' zwei verschiedene Zweige, und sei H durch die Gleichung (1.) gegeben, während H' durch

$$\text{(1'.)} \qquad \mathsf{H}' = \frac{\nu' i+\varrho' \mathsf{H}_0}{\lambda'+\mu' i \mathsf{H}_0}$$

definirt wird, wo wiederum λ', μ', ν', ϱ' ganze Zahlen, welche der Gleichung

$$\text{(2'.)} \qquad \lambda'\varrho'+\mu'\nu' = 1$$

genügen und wovon λ', ϱ' ungerade Zahlen, μ', ν' gerade Zahlen sind.

Für zwei verschiedene Werthe $u = u_0$ und $u = u_1$ kann wegen der Eindeutigkeit der Function u von H nicht $\mathsf{H}'(u_0) = \mathsf{H}'(u_1)$ sein. Es kann aber auch nicht

$$(3.)\qquad \mathsf{H}'(u_0) = \mathsf{H}(u_0)$$

sein. Denn aus (1.) und (1'.) würde alsdann folgen

$$(4.)\qquad \mathsf{H}_0(u_0)^2 + \frac{\alpha-\delta}{\beta i}\mathsf{H}_0(u_0) - \frac{\gamma}{\beta} = 0,$$

wo

$$(5.)\qquad \begin{pmatrix}\alpha & \beta i\\ \gamma i & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda' & \mu' i\\ \nu' i & \varrho'\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & \mu i\\ \nu i & \varrho\end{pmatrix}.$$

Aus (4.) ergiebt sich wegen

$$(6.)\qquad \alpha\delta + \beta\gamma = 1$$

$$(7.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{\alpha-\delta}{2\beta}i \pm \sqrt{4-(\alpha+\delta)^2}.$$

Nach B. p. 22 sind α, δ ungerade Zahlen, β, γ gerade Zahlen. Es kann nicht $\alpha+\delta = 0$ sein, weil sonst nach (6.)

$$(8.)\qquad \beta\gamma - 2 = (\alpha-1)(\alpha+1),$$

was nicht möglich ist, da die rechte Seite durch 4 theilbar wäre, die linke Seite aber nicht. Es hat also $(\alpha+\delta)^2$ mindestens den Werth 4, daher liefert die Gleichung (7.) einen Werth H_0 auf der lateralen Axe.

Die sämmtlichen Zweigwerthe H erfüllen daher in der H-Ebene Flächengebiete, ***welche nirgendwo ausserhalb der lateralen Axe Punkte gemeinschaftlich haben.***

Da wir aber bewiesen haben, dass jedem Punkte H in der die positive Seite der realen Axe enthaltenden Halbebene Werthe u entsprechen, ***so erfüllt die Gesammtheit der Zweige diese Halbebene lückenlos.***

Es müssen daher an der lateralen H-Axe über alle Grenzen abnehmende Flächentheile sich anhäufen, welche Zweigwerthe von H darstellen.

Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die algebraischen Functionen.

(Fortsetzung der Abhandlungen in Bd. 104 und 108 dieses Journals.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Die Anwendungen der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die algebraischen Functionen, welche der Verfasser in den Bänden 104 und 108 dieses Journals vorgenommen hat, werden in der vorliegenden Arbeit vereinfacht und weiter fortgeführt.

Von der algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Functionen einer unabhängigen Variablen als Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Potenz der abhängigen Variablen gleich Eins soll nur vorausgesetzt werden, dass die Discriminante derselben nicht identisch verschwindet, demnach die Wurzeln der Gleichung abgesehen von einer endlichen Anzahl von Stellen unter einander verschieden sind, während die Gleichung selbst reductibel oder irreductibel sein kann. Alsdann bestehen alle Untersuchungen und Resultate, die in Abh. Bd. 104 enthalten sind, unverändert. Auch das in Abh. Bd. 108 gegebene, auf einen in Abh. Bd. 104 aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen hergeleiteten Satz sich gründende Verfahren, um an den Stellen, an welchen die Discriminante verschwindet, und bei dem Punkte im Unendlichen die Ordnungen der Verzweigungen vor Entwickelung der Zweige zu erkennen, bleibt unabhängig von der Reductibilität oder Irreductibilität der Gleichung bestehen. Sind aber die Ordnungen der Verzweigungen an den genannten Stellen ermittelt, so lässt sich hieraus in vielen Fällen direct ersehen, ob die Gleichung irreductibel ist, und alsdann ergiebt sich das Geschlecht der irreductiblen algebraischen Function aus den bekannt gewordenen Ordnungen der Verzweigungen unmittelbar.



In der nachstehenden Abhandlung werden nun weitere Vereinfachungen vorgenommen, die dahin gehen, dass die Constanten in den zu Hülfe gezogenen homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten sich rational aus den Constanten der ursprünglichen Gleichung zusammensetzen. Zunächst wird in No. 1 das Verfahren aus Bd. 108, um die Ordnungen der Verzweigungen vor Entwickelung der Zweige zu ermitteln, vereinfacht. Der Umstand, dass allgemein die Ordnungen der Verzweigungen auf eine einfache Weise sich ergeben, wird alsdann in No. 2 zu einer directen Entwickelung der Zweige verwandt vermittelst der Methode, die in No. 8 der Abhandlung Bd. 104 auseinandergesetzt ist. Zur vollständigen Darstellung der Verzweigungen dienen schliesslich auf Grundlage der Angaben in No. 2, 6 und 7 der Abhandlung Bd. 104 die Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche von den durch die algebraische Gleichung gegebenen Functionszweigen erfüllt wird und deren Ordnung gleich der Anzahl der linearunabhängigen Zweige ist. Die Coefficienten in der Entwickelung dieser Integrale erhält man durch eine fertige Recursionsformel mit constanter Anzahl der Glieder. Ueber die Herleitung dieser Differentialgleichung werden hier in No. 3 und 4 nähere Untersuchungen vorgenommen.

1.

Die algebraische Gleichung $n$ten Grades in Bezug auf die abhängige Variable z

$$(1.)\qquad f(\overset{n}{z}, x) = 0,$$

in welcher der Coefficient von z^n gleich Eins, die übrigen Coefficienten der Potenzen von z ganze rationale Functionen von x sind, sei so beschaffen, dass die Discriminante der Gleichung nicht identisch verschwindet; die Gleichung (1.) darf reductibel oder irreductibel sein. Nun kann man eine algebraische (reductible oder irreductible) Function s

$$(2.)\qquad s = C(\varDelta_0+\varDelta_1 z+\varDelta_2 z^2+\cdots+\varDelta_{n-1} z^{n-1}),$$

wo C eine Constante ist, die $\varDelta$ ganze rationale Functionen von x sind, herstellen, so dass die n Zweige s, die aus (2.) durch Einsetzen der n Zweige z aus Gleichung (1.) hervorgehen, linearunabhängig sind. Eine solche Function

$$(3.)\qquad \varDelta_0+\varDelta_1 z+\varDelta_2 z^2+\cdots+\varDelta_{n-1} z^{n-1}$$

ist in Abh. Bd. 108 Nr. 4 hergeleitet. Hier wird dieser Ausdruck noch

mit einer Constanten C multiplicirt. Es soll nun über diese Constante C und die in die Δ eingehenden Constanten so verfügt werden, ***dass alle constanten Coefficienten der Potenzen von x in dem Ausdrucke*** (2.) ***sich rational aus den constanten Coefficienten in der Gleichung $f(\overset{n}{z}, x) = 0$ zusammensetzen.***

Zu dem Zwecke werden die Formeln in Abh. Bd. 108 No. 4 zu Grunde gelegt. Es war dort ein Punkt a angenommen, in welchem die Discriminante von $f(\overset{n}{z}, x) = 0$ nicht verschwindet. Die n von einander verschiedenen Wurzeln von $f(\overset{n}{z}, a) = 0$ seien durch ζ_1, ζ_2 bis ζ_n bezeichnet; dieselben brauchen für den vorliegenden Zweck nicht bekannt zu sein. Die Ausdrücke der Entwickelungen der n Zweige z aus Gleichung (1.) z_1, z_2 bis z_n, nach Potenzen von $x-a$ bis zur Potenz $(x-a)^{n-1}$ werden aufgestellt. Die Coefficienten in denselben werden vermittelst der aus Gleichung (1.) herzuleitenden Formeln

$$(4.)\qquad \frac{d^r z}{dx^r} = \frac{L_r(z, x)}{(Dx)^r} \qquad (r=1, \dots, n-1)$$

hergestellt, wo $L_r(z, x)$ eine ganze rationale Function von x und z, in Bezug auf z höchstens $(n-1)$ten Grades, Dx die Discriminante von $f(\overset{n}{z}, x) = 0$ ist und die constanten Coefficienten der Potenzen von x und z sich rational aus den Constanten der Gleichung (1.) zusammensetzen (vgl. Abh. Bd. 104 No. 1). Nun sollte gemäss Abh. Bd. 108 Nr. 4 eine rationale Function von x und z, $s = \sum_0^{n-1} g_r(x) z^r$, so bestimmt werden, dass deren n Zweige s_1, s_2 bis s_n in den n ersten Gliedern der Entwickelungen nach Potenzen von $x-a$ bezüglich mit s'_1, s'_2 bis s'_n übereinstimmen, wo diese Grössen

$$(5.)\qquad s'_r = a_{r1} + a_{r2}(x-a) + \dots + a_{rn}(x-a)^{n-1} \qquad (r=1, \dots, n)$$

so gewählt sind, dass die Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ nicht verschwindet. Hier wird nun noch hinzugefügt, dass a_{rk} eine ganze rationale Function von ζ_r werden soll mit Constanten, die für $r = 1, \dots, n$ dieselben sind und die sich rational aus den Constanten der Gleichung (1.) zusammensetzen; man kann dazu einfach

$$(6.)\qquad a_{rk} = \zeta_r^{k-1}$$

setzen. In der in Abh. Bd. 108 No. 4 (5.) mit D_a bezeichneten Determinante war dann die Entwickelung der einzelnen Elemente nach Potenzen von $x-a$ bis zur Potenz $(x-a)^{n-1}$ vorgenommen, die Coefficienten in diesen Entwicklungen sind ganze rationale Functionen von ζ_1 bis ζ_n, und es waren diese

Polynome von $x-a$ an Stelle der Elemente in D_a eingesetzt. Die hierdurch hervorgehende Determinante ist jetzt eine ganze rationale Function von $x-a$ und zugleich eine alternirende ganze rationale Function der von einander unabhängig bleibenden Variablen ζ_1 bis ζ_n. Functionen von letzterer Eigenschaft sind demnach auch die einzelnen Coefficienten der Potenzen von $x-a$ in dieser ganzen rationalen Function von $x-a$. Werden aus dieser Function die bis zu der Potenz $(x-a)^{n-1}$ aufsteigenden Glieder herausgenommen, so erhält man das Polynom $\varDelta_a$ in (3.). Es ist nun für den Multiplicator C in (2.) eine alternirende ganze rationale Function der Variablen ζ_1 bis ζ_n zu nehmen, deren Coefficienten sich rational aus den Constanten der Gleichung (1.) zusammensetzen, wofür man die Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ aus (5.) anwenden kann; dann werden die Coefficienten der Potenzen von $x-a$ in (2.) symmetrische ganze rationale Ausdrücke der Variablen ζ_1 bis ζ_n. Dieselben sind demnach, wenn ζ_1 bis ζ_n die Wurzeln der Gleichung $f(\overset{n}{z}, a) = 0$ bedeuten, rational durch die Constanten in $f(\overset{n}{z}, a) = 0$ ausdrückbar. Wird nun noch für a eine rationale Zahl genommen, für welche die Discriminante von (1.) nicht verschwindet, so ergeben sich die constanten Coefficienten der Potenzen von x in dem Ausdrucke s (2.) als rationale Ausdrücke der Constanten in der Gleichung (1.).

Nun wird für s die algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) = 0 \tag{7.}$$

gebildet, indem für s_1, s_2 bis s_n die Ausdrücke (2.) eingesetzt werden, wenn für z die n Zweige z_1 bis z_n eintreten; alsdann werden in (7.) die symmetrischen Functionen von z_1 bis z_n durch die Coefficienten der Gleichung (1.) ausgedrückt. Hierdurch gehe die Gleichung

$$s^n + t_1 s^{n-1} + \dots + t_n = 0, \tag{8.}$$

hervor, worin die t ganze rationale Functionen von x sind. Die Constanten in der Gleichung (8.) *sind dann auch rationale Ausdrücke der Constanten in Gleichung* (1.).

Da die n Zweige von s, s_1 bis s_n, linearunabhängig sind, so müssen dieselben in einem Gebiete, wo sie einwerthig und stetig sind, in einem Punkte und daher in der Nähe desselben alle unter einander verschieden sein. Die Discriminante der Gleichung (8.) ist also nicht identisch gleich Null. Und umgekehrt folgt aus letzterem Umstande, dass die n Wurzeln der Gleichung (8.) s_1 bis s_n aus (7.) abgesehen von einer endlichen Anzahl

hinreichend, dass die Discriminante der Gleichung (8.) ***nicht identisch verschwindet, alsdann dafür, dass die n Zweige von s linearunabhängig sind, nothwendig und hinreichend, dass die Determinante*** (12.) ***nicht identisch verschwindet.***

Die homogene lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welcher die n linearunabhängigen Zweige s aus der Gleichung (8.) genügen, ist (11.). Wenn diese Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{d^n s}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}s}{dx^{n-1}}+\cdots+p_n s = 0 \tag{14.}$$

reducirt wird, wo die gemeinschaftlichen Theiler in Zähler und Nenner der rationalen Coefficienten weggeschafft sein können, so kann die Richtigkeit derselben nachträglich geprüft werden nach den Angaben, die in No. 4 gemacht sind.

Die algebraische reductible oder irreductible Function s ist also wie die Function z verzweigt. Die Ordnungen der Verzweigungen von s, und daher diejenigen von z, bei einem Punkte $x = a$ (entsprechend bei $x = \infty$) ergeben sich nun, weil die n Zweige von s linearunabhängig sind, vermittelst der homogenen linearen Differentialgleichung (11.) $n$ter Ordnung, welcher diese Zweige genügen. Bei dem betreffenden Punkte ist die Exponentengleichung dieser Differentialgleichung aufzustellen und sind die Wurzeln dieser Gleichung zu ermitteln. Dieselben sind n von einander verschiedene rationale Zahlen gleich oder grösser als Null, die in der kleinsten Benennung Nenner gleich oder kleiner als n haben. Aus diesen rationalen Zahlen ergeben sich unmittelbar die Ordnungen der Verzweigungen von s gemäss den Sätzen, die in Abh. Bd. 104 No. 5 I und II aufgestellt und bewiesen und in Abh. Bd. 108 No. 3 angegeben sind.

2.

Es soll wiederum eine beliebige algebraische Gleichung mit ganzen rationalen Functionen einer unabhängigen Variablen als Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Potenz der abhängigen Variablen gleich Eins vorliegen, deren Discriminante nicht identisch verschwindet. Alsdann soll bei einem Punkte x, in welchem die Discriminante verschwindet, die Entwickelung der die Gleichung erfüllenden Functionszweige vorgenommen werden. Entsprechend ist das Verfahren bei $x = \infty$. ***Die Ordnungen der vorkommenden Verzweigungen sind also jetzt immer vorher bekannt.***

Alsdann tritt das directe Verfahren ein, welches in Abh. Bd. 104 No. 8 auseinandergesetzt ist. Die algebraische Gleichung sei (in Uebereinstimmung mit den l. c. gemachten Bezeichnungen) durch $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ bezeichnet, $n$ten Grades in Bezug auf die abhängige Variable s, der Punkt, bei dem entwickelt werden soll, sei $x = a$. An der Stelle a sind die Windungspunkte mit ihren Verzweigungsordnungen (ein μ-blättriger Windungspunkt enthält eine Verzweigung $(\mu-1)$-facher Ordnung) und die Punkte, bei denen die Verzweigung nullter Ordnung ist, d. h. keine Verzweigung stattfindet (gewöhnliche Punkte) bekannt. Bei dem Punkte a sind die n Wurzeln der Gleichung $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ aufzustellen. Durch Uebergang auf den Punkt $x = a$ in der Gleichung

$$(1.)\qquad (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) = F(\overset{n}{s}, x),$$

wo s_1, s_2 bis s_n die Entwickelungen der n Zweige von s bei $x = a$ sind, ergiebt sich, dass die in einem μ-blättrigen Windungspunkte zusammenhängenden μ Zweige μ gleiche Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ liefern, und dass von einem Zweige bei einem gewöhnlichen Punkte eine Wurzel von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ herkommt.

Nun ist zuzusehen, ob die Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ den bekannten Ordnungen der Verzweigungen gemäss sich auf eine einzige Weise auf Windungs- und gewöhnliche Punkte vertheilen lassen, bezüglich, bei welchen Windungs- oder gewöhnlichen Punkten diese Vertheilung eindeutig feststeht.

Bei einem μ-blättrigen Windungspunkt möge die mehrfache Wurzel β von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ vorkommen, und es soll die Wurzel β sonst bei keinem Windungspunkte oder gewöhnlichen Punkte eintreten können. Die Entwickelung der Function s bei diesem Windungspunkte ist

$$(2.)\qquad s = \beta + \sum_1^\infty c_\alpha \zeta^\alpha, \quad \zeta = (x-a)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Nun wird in Gleichung $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ $s - \beta = u$, $x - a = \zeta^\mu$ gesetzt; die Gleichung wird alsdann erfüllt, wenn für u die Entwickelungen der μ in dem μ-blättrigen Windungspunkte zusammenhängenden Zweige von $s-\beta$

$$(3.)\qquad \sum_1^\infty c_\alpha(\omega^r\zeta)^\alpha, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}, \qquad {\scriptstyle (r = 0, \dots, \mu-1)}$$

gesetzt werden, die gleichzeitig zu betrachten sind. Die Coefficienten in

diesen Entwickelungen werden successive direct aus der Gleichung $F(\overset{n}{s}, x) = 0$, worin $s-\beta = u$, $x-a = \zeta^\mu$ gesetzt ist, ermittelt, wie in Abh. Bd. 104 No. 8 vollständig auseinandergesetzt ist. Im Verlaufe der Coefficientenbestimmung kommt man in jeder Reihe zu einer Recursionsformel, durch welche die folgenden Coefficienten eindeutig durch die vorhergehenden bestimmt werden.

Wenn bei $x = a$ λ ($\lambda \geqq 1$) einwerthige Functionen als Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ vorhanden sind, auf die ein und dieselbe Wurzel β' von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ kommt, die sich bei Windungspunkten (oder noch sonst vorhandenen gewöhnlichen Punkten) nicht findet, so wird $s-\beta' = u$, $x-a = \zeta$ gesetzt und es sind die λ Reihen

$$(4.) \qquad \sum_1^\infty c_\lambda^{(\sigma)} \zeta^\lambda, \qquad (\sigma = 0, \ldots, \lambda-1)$$

gleichzeitig zu betrachten. Das weitere Verfahren ist dasselbe wie vorhin nach dem in Abh. Bd. 104 No. 8 bei (14.), (15.) Gesagten. Ebenso wenn bei $\varkappa$ μ-blättrigen Windungspunkten ein und dieselbe Wurzel β aus $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ vorkommt, die nicht bei anderen Windungspunkten oder gewöhnlichen Punkten eintritt. Dann ist gleichfalls $s-\beta = u$, $x-a = \zeta^\mu$ zu setzen und man erhält für u die $\varkappa\mu$ Reihen

$$(5.) \qquad \sum_1^\infty c_\lambda^{(\sigma)} (\omega^r \zeta)^\lambda, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}, \qquad (\sigma = 0, \ldots, \varkappa-1,\ r = 0, \ldots, \mu-1)$$

die gleichzeitig zu behandeln sind in der früheren Weise. Man kommt in diesen beiden Fällen bei jeder Reihe im Verlauf der Coefficientenbestimmung zu einer Recursionsformel, vermittelst welcher die folgenden Coefficienten eindeutig durch die vorhergehenden ausgedrückt werden. Wenn in (5.) die Bestimmung der Coefficienten so weit fortgesetzt ist, dass die Reihen unter einander verschieden werden, so kann man erkennen, welche μ Reihen in demselben Windungspunkte zusammengehören. Denn nimmt man beliebig eine der Reihen (5.) heraus, so erhält man die $\mu-1$ in demselben Windungspunkte zu dieser gehörigen, wenn statt ζ gesetzt wird $\omega^s\zeta$ ($s = 1, \ldots, \mu-1$). Wird dann für ζ in einer der zusammengehörigen Entwickelungen $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ gesetzt, so ergiebt sich die Entwickelung der $\varkappa$ μ-werthigen Functionen $s-\beta$ bei den $\varkappa$ μ-blättrigen Windungspunkten bis zu dem ermittelten Gliede; entsprechend bei (3.).

Die vollständige Darstellung dieser mehrwerthigen Functionen bei den Windungspunkten und der einwerthigen bei den gewöhnlichen Punkten erfolgt nun vermittelst der Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welcher die in der algebraischen Gleichung enthaltenen Functionszweige s genügen, $f_\varrho(s, x) = 0$, deren Ordnung ϱ mit der Anzahl der linearunabhängigen Zweige übereinstimmt, wie dieses in Abh. Bd. 104, No. 2, 6, 7 durchgeführt ist. Die Coefficienten in der Entwickelung dieser Integrale werden vermittelst einer fertigen Recursionsformel, die eine constante Anzahl der Glieder linear und homogen enthält, gegeben. In dieser Recursionsformel kommen, wie in No. 3 gezeigt wird, ausser dem Punkte a, bei dem entwickelt wird, nur solche Constanten vor, die rational aus den Constanten der Gleichung $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ sich zusammensetzen.

Aus den bis jetzt behandelten Fällen setzt sich derjenige Fall zusammen, wo auf Grund der bekannten Ordnungen der Verzweigungen und der bekannten Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ bei einem Punkte $x = a$, in welchem die Discriminante verschwindet, *die Vertheilung dieser Wurzeln auf Windungspunkte und gewöhnliche Punkte in eindeutig bestimmter Weise stattfindet und dabei nicht auf einen λ-blättrigen und auf einen μ-blättrigen Windungspunkt, wo $\lambda \lesseqgtr \mu$ ist, oder auf einen Windungspunkt und gewöhnlichen Punkt ein und dieselbe Wurzel kommt.*

Nun bleiben noch folgende Fälle zu betrachten, der Fall, wo sich ergiebt, dass ein und dieselbe mehrfache Wurzel von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ auf verschiedenblättrige Windungspunkte, bezüglich auf Windungspunkte und gewöhnliche Punkte fällt, und bei anderen Windungs- oder gewöhnlichen Punkten an der Stelle a nicht vorkommen kann, alsdann der Fall, wo die Vertheilung bestimmter Wurzeln von $F(\overset{n}{s}, a) = 0$ bei mehreren oder allen Windungs- und gewöhnlichen Punkten nicht vorher eindeutig feststeht. Auf diese Fälle kann man nun hier, da die Ordnungen der Verzweigungen bereits bekannt sind, zur Bestimmung der Coefficienten in den Entwickelungen unmittelbar dasjenige Verfahren anwenden, welches in Abh. Bd. 104 S. 27 und 28 auf den allgemeinen Fall vermittelst der Integrale der vorhin genannten linearen Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$, die als bekannt vorausgesetzt war, angewandt worden ist.

Es seien also jetzt mehrere, bezüglich alle Windungs- und gewöhn-

lichen Punkte herausgenommen und es sei nur bekannt, welche Wurzeln von $\overset{n}{F}(s, a) = 0$ auf die Gesammtheit dieser Punkte kommen, und dass diese Wurzeln bei anderen etwa vorhandenen Windungs- oder gewöhnlichen Punkten sich nicht finden. Von verschiedenblättrigen Windungspunkten mögen etwa λ-blättrige, μ-blättrige, ν-blättrige vorkommen, ausserdem etwa gewöhnliche Punkte (oder λ-blättrige Windungspunkte und gewöhnliche Punkte). Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von λ, μ, ν (bezüglich λ und 1) sei M, die Gesammtanzahl der jetzt betrachteten Zweige sei m. An Stelle von $x-a$ in den Entwickelungen dieser Zweige bei den Windungspunkten und bei den gewöhnlichen Punkten wird ζ^M gesetzt. Man erhält dann (vgl. (3.) (5.)) die Reihen

$$(6.) \qquad c_0^{(\tau)} + \sum_1^\infty c_\alpha^{(\tau)} \zeta^\alpha \qquad (\tau = 1, \ldots, m)$$

welche die Gleichung $\overset{n}{F}(s, x) = 0$, worin $x-a = \zeta^M$ gesetzt ist, erfüllen. Die Constanten $c_0^{(\tau)}$ $(\tau = 1, \ldots, m)$ sind Wurzeln von $\overset{n}{F}(s, a) = 0$ und keine der übrigen $n-m$ Wurzeln dieser Gleichung ist einer jener Constanten gleich. Nun sind diejenigen Reihen (6.), in denen die Constanten $c_0^{(\tau)}$ denselben Werth haben, gleichzeitig zu betrachten. Auf diese Reihen ist zur Bestimmung der Coefficienten das frühere Verfahren, wie bei (4.), anzuwenden. Man kommt bei jeder der Reihen zu einer Recursionsformel, welche die folgenden Coefficienten durch die vorhergehenden ausgedrückt liefert.

Die Entwickelungen der ein- und mehrwerthigen Functionen, aus welchen die Reihen (6.) hervorgegangen sind, seien linear mit constanten Coefficienten durch Integrale der oben genannten linearen Differentialgleichung $f_\varrho(s, x) = 0$ ausgedrückt. Es sei ein System von ϱ linearunabhängigen Integralen genommen, welche zu den Wurzeln der Exponentengleichung bei $x = a$ gehören, ein solches ist in Abh. Bd. 104 No. 6 gegeben. Diese Wurzeln sind von einander verschiedene rationale Zahlen $\geqq 0$, deren Nenner in der kleinsten Benennung $\leqq n$ sind. In die Ausdrücke der betrachteten Functionen, aus denen die Reihen (6.) hervorgehen, können nur solche Integrale eingehen, deren Exponenten auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden können, der bezüglich λ, μ, ν, 1 ist. Die Exponenten dieser sämmtlichen Integrale seien auf die kleinste Benennung gebracht, dann ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner gleichfalls die Zahl M; denn die Exponenten der Integrale, welche zur Darstellung

z. B. der λ-werthigen Function bei einem λ-blättrigen Windungspunkte eingehen, auf den gemeinschaftlichen Nenner λ gebracht, müssen Zähler haben, welche einerseits mit λ andererseits keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Der grösste dieser Exponenten sei $\frac{H}{M}$. Nun wird in allen diesen Integralen $x-a=\zeta^M$ gesetzt, wobei man von einem Werthe des $\log(x-a)$ in $e^{\frac{1}{M}\log(x-a)}$ ausgeht; hierdurch erhält man die Reihen (6.) durch diese Integrale ausgedrückt. Aus diesen Ausdrücken ergiebt sich, dass wenn die Entwickelungen (6.) bis ζ^H fortgesetzt sind, dieselben unter einander verschieden werden müssen. Zugleich ist, wenn die Entwickelungen (6.) bis ζ^H fortgesetzt sind, die Zuordnung der erhaltenen Polynome zu den in Betracht kommenden Windungs- und gewöhnlichen Punkten nur noch auf eine Weise möglich. Denn mit Bezug auf einen λ-blättrigen Windungspunkt seien λ dieser Polynome herausgenommen, die, wenn $M=\lambda M'$ gesetzt wird, nach Potenzen von $\zeta^{M'}$ fortschreiten und in der Beziehung stehen, dass aus einem die übrigen hervorgehen, indem an Stelle von $\zeta^{M'}$ gesetzt wird $e^{s\frac{2\pi i}{\lambda}}\zeta^{M'}(s=1,\ \dots,\ \lambda-1)$. Wenn nun diese Polynome bis ζ^H fortgeführt waren, so ergiebt sich aus der Darstellung der vollständigen Reihen (6.), zu welchen diese Polynome gehören, durch die Integrale, in denen $x-a=\zeta^M$ gesetzt ist, dass diese Reihen thatsächlich in dem Zusammenhange stehen, der einem λ-blättrigen Windungspunkte entspricht.

Man kann daher zunächst, bevor die Differentialgleichung $f_\varrho(s,x)=0$ aufgestellt ist, im Verlaufe der Bestimmung der Coefficienten in den Entwickelungen (6.) zusehen, ob sich aus den erhaltenen Polynomen bereits erkennen lässt, dass die Zuordnung derselben zu den in Betracht kommenden Windungs- und gewöhnlichen Punkten nur auf eine Weise möglich ist. Durch Substitution von $(x-a)^{\frac{1}{M}}$ für ζ erhält man dann ebenso weit die Entwickelung der bezüglichen mehrwerthigen oder einwerthigen Functionen. *Sonst aber ist, um diese Zuordnung zu bewirken, die Differentialgleichung* $f_\varrho(s,x)=0$ *hinzuzuziehen, durch deren Integrale schliesslich die vollständige Darstellung der betrachteten Functionen bewerkstelligt wird.* Nachdem die Coefficienten in (6.) bis ζ^H bestimmt sind, werden die Ausdrücke der Reihen (6.) durch die oben bezeichneten Integrale, in denen $x-a$ durch ζ^M ersetzt ist, wirklich hergestellt. Dann wird in diesen Ausdrücken für ζ wieder $(x-a)^{\frac{1}{M}}$ gesetzt, wodurch man die Ausdrücke der betrachteten m Zweige durch

von $x-a$ abhängende Integrale von $f_\varrho(s, x) = 0$ erhält. Und nun ergiebt sich aus letzteren Ausdrücken direct der Zusammenhang der Zweige und die vollständige Darstellung der mehrwerthigen oder einwerthigen Functionen durch die Integrale, wie dieses in Abh. Bd. 104 S. 28 ausführlich dargestellt ist.

3.

Die n Functionszweige s, welche durch eine algebraische Gleichung

$$(1.)\qquad F(\overset{n}{s}, x) = 0$$

$n$ten Grades in Bezug auf s mit dem Coefficienten 1 von s^n und ganzen rationalen Functionen von x als Coefficienten der Potenzen von s und mit nicht identisch verschwindender Discriminante gegeben werden, genügen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, deren Ordnung mit der Anzahl der linearunabhängigen Zweige übereinstimmt. Ueber die Herleitung dieser Differentialgleichung werden die folgenden näheren Untersuchungen gemacht.

Aus der Gleichung (1.) ergiebt sich (vgl. Abh. Bd. 104 No. 1) das System der Gleichungen

$$(2.)\qquad \frac{d^r s}{dx^r} = \frac{M_r(s, x)}{(\Delta x)^r}, \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

wo $M_r(s, x)$ eine ganze rationale Function von x und s, in Bezug auf s höchstens $(n-1)$-ten Grades, Δx die Discriminante der Gleichung (1.) ist. Es sei

$$(3.)\qquad M_r(s, x) = g_r s + h_{r1} + h_{r2} s^2 + \cdots + h_{r,n-1} s^{n-1},$$

wo die g und h ganze rationale Functionen von x sind, deren Constanten, wie diejenigen in Δx, sich als rationale Ausdrücke der Constanten in $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ darstellen. Die Gleichungen (2.) seien auf die Form

$$(4.)\qquad (\Delta x)^r \frac{d^r s}{dx^r} = M_r(s, x) \qquad (r = 1, \ldots n)$$

gebracht. Es ist nun das System der Grössen

$$(5.)\qquad \begin{cases} h_{11}, & h_{12}, & \ldots, & h_{1,n-1}, \\ h_{21}, & h_{22}, & \ldots, & h_{2,n-1}, \\ \vdots \\ h_{r1}, & h_{r2}, & \ldots, & h_{r,n-1}, \end{cases}$$

successive für $r = 1, 2$ etc. zu betrachten. Wenn die Grössen

$$(6.)\qquad h_{11}, \quad h_{12}, \quad \ldots, \quad h_{1,n-1}$$

alle verschwinden, so ist

$$(7.)\qquad \varDelta x \frac{ds}{dx} - g_1 s = 0$$

die gesuchte Differentialgleichung. Wenn aber die Grössen (6.) nicht alle verschwinden, so möge, indem man in der Reihe der Zeiger 1, 2 etc. aufsteigt, für jeden Zeiger m von 1 bis $\varrho-1$ eine Determinante $m$ter Ordnung

$$(8.)\qquad \begin{vmatrix} h_{1\alpha} & h_{1\beta} & \dots & h_{1\mu} \\ h_{2\alpha} & h_{2\beta} & \dots & h_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m\alpha} & h_{m\beta} & \dots & h_{m\mu} \end{vmatrix},$$

wo $\alpha, \beta, \dots, \mu$ je m Zeiger aus der Reihe 1 bis $n-1$ sind, sich finden, welche nicht identisch verschwindet. Eine Determinante $(\varrho-1)$-ter Ordnung, welche nicht identisch verschwindet,

$$(9.)\qquad \begin{vmatrix} h_{1\alpha_1} & h_{1\alpha_2} & \dots & h_{1\alpha_{\varrho-1}} \\ h_{2\alpha_1} & h_{2\alpha_2} & \dots & h_{2\alpha_{\varrho-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{\varrho-1,\alpha_1} & h_{\varrho-1,\alpha_2} & \dots & h_{\varrho-1,\alpha_{\varrho-1}} \end{vmatrix},$$

worin α_1, α_2 bis $\alpha_{\varrho-1}$ Zeiger aus der Reihe 1 bis $n-1$ sind, sei ferner der Art, dass die $n-1$ Determinanten ϱter Ordnung

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} h_{1i} & h_{1\alpha_1} & h_{1\alpha_2} & \dots & h_{1\alpha_{\varrho-1}} \\ h_{2i} & h_{2\alpha_1} & h_{2\alpha_2} & \dots & h_{2\alpha_{\varrho-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{\varrho-1,i} & h_{\varrho-1,\alpha_1} & h_{\varrho-1,\alpha_2} & \dots & h_{\varrho-1,\alpha_{\varrho-1}} \\ h_{\varrho i} & h_{\varrho\alpha_1} & h_{\varrho\alpha_2} & \dots & h_{\varrho\alpha_{\varrho-1}} \end{vmatrix} \qquad (i=1,\dots,n-1)$$

alle identisch verschwinden, wobei entweder $\varrho < n$ ist, oder, wenn $\varrho = n$ ist, so verschwinden die Determinanten (10.) für beliebige Werthe der h. Dann ergiebt sich aus (4.), (9.) und (10.)

$$(11.)\qquad \begin{vmatrix} \varDelta x \frac{ds}{dx} - g_1 s & h_{1\alpha_1} & h_{1\alpha_2} & \dots & h_{1\alpha_{\varrho-1}} \\ (\varDelta x)^2 \frac{d^2 s}{dx^2} - g_2 s & h_{2\alpha_1} & h_{2\alpha_2} & \dots & h_{2\alpha_{\varrho-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varDelta x)^{\varrho-1} \frac{d^{\varrho-1} s}{dx^{\varrho-1}} - g_{\varrho-1} s & h_{\varrho-1,\alpha_1} & h_{\varrho-1,\alpha_2} & \dots & h_{\varrho-1,\alpha_{\varrho-1}} \\ (\varDelta x)^{\varrho} \frac{d^{\varrho} s}{dx^{\varrho}} - g_{\varrho} s & h_{\varrho\alpha_1} & h_{\varrho\alpha_2} & \dots & h_{\varrho\alpha_{\varrho-1}} \end{vmatrix} = 0,$$

eine Differentialgleichung ϱter Ordnung, welcher s genügt. Nun kann keine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, die nicht alle verschwinden, von niedrigerer als ϱter Ordnung für die n Zweige s aus Gleichung (1.) bestehen. Denn wenn eine solche $m$ter Ordnung bestände, so sei dieselbe auf die Form

$$(12.)\quad (\varDelta x)^m \frac{d^m s}{dx^m} + a_1 (\varDelta x)^{m-1} \frac{d^{m-1} s}{dx^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \varDelta x \frac{ds}{dx} + a_m s = 0$$

gebracht. Dann ergiebt sich aus (4.), weil die n Zweige s abgesehen von einer endlichen Anzahl von Punkten von einander verschieden sind,

$$(13.)\qquad h_{mi} + a_1 h_{m-1,i} + \cdots + a_{m-1} h_{1,i} = 0. \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n-1)}$$

Aus (13.) folgt, dass sämmtliche Determinanten (8.), in denen $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ beliebige m Zeiger aus der Reihe 1 bis $n-1$ sind, verschwinden müssen. Dieses sowohl, wie auch die nach dem *Laplace*schen Determinantensatze sich ergebende Folgerung, dass dann auch die Determinante (9.) verschwinden müsste, widerspricht der Voraussetzung. Andererseits ergiebt sich durch functionentheoretische Betrachtungen die Existenz der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich Eins, welcher die n Functionszweige s aus der algebraischen Gleichung (1.) genügen, und deren Ordnung mit der Anzahl der linearunabhängigen Zweige übereinstimmt. Daher muss diese Anzahl gleich der Ordnung ϱ in der Differentialgleichung (11.) sein und diese Differentialgleichung, nachdem durch den Coefficienten der höchsten Ableitung dividirt ist, muss die vorhin bezeichnete Differentialgleichung sein*).

Die homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welcher die n Zweige s aus Gleichung (1.) genügen und deren Ordnung mit der Anzahl der linearunabhängigen Zweige übereinstimmt, wird also in folgender Weise gegeben: ***Wenn in dem Systeme der Grössen*** (5.) ***diejenigen der ersten Horizontalzeile alle identisch verschwinden, so ist die Differentialgleichung erster Ordnung*** (7.) ***die gesuchte Differentialgleichung. Sonst aber giebt es eine Determinante wie*** (9.) ($\varrho-1$)***-ter Ordnung, welche nicht identisch verschwindet, während die Determinanten*** (10.) ϱ***ter Ordnung***

---

*) Nach einer mündlichen Mittheilung, die mir *Kronecker* bei Gelegenheit der Einreichung meiner Abhandlung Bd. 104 gemacht hat, war demselben ein in Eliminationen bestehendes Verfahren, die oben genannte Differentialgleichung herzuleiten, bekannt, worüber vielleicht die Herausgabe des Nachlasses nähere Auskunft verschafft.

identisch verschwinden; alsdann ist die Differentialgleichung ϱ*ter Ordnung* (11.) *die gesuchte Differentialgleichung.*

Die Constanten in den rationalen Functionen in der Differentialgleichung (7.) *bezüglich* (11.) *setzen sich rational aus den Constanten der Gleichung* $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ *zusammen.* Werden die Integrale dieser Differentialgleichung bei irgend einem Punkte a entwickelt, so erhält man die Coefficienten in dieser Entwickelung vermittelst *einer fertigen Recursionsformel, die eine constante Anzahl der Glieder linear und homogen enthält* (Abh. Bd. 104 No. 6). *Die Constanten, welche in diese Recursionsformel eingehen, setzen sich rational aus dem Punkte a, bei dem entwickelt wird, und den Constanten in der Gleichung* $F(\overset{n}{s}, x) = 0$ *zusammen.*

4.

Nachdem die homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welcher die n Zweige s aus der Gleichung No. 3 (1.) genügen und deren Ordnung mit der Anzahl der linearunabhängigen Zweige s übereinstimmt, durch den Ausdruck No. 3 (7.) bezüglich (11.) aufgestellt ist, sei dieselbe nun auf die Form gebracht:

$$(1.)\qquad \frac{d^{\varrho} s}{dx^{\varrho}} + p_1 \frac{d^{\varrho-1} s}{dx^{\varrho-1}} + \cdots + p_{\varrho} s = 0,$$

wo im Zähler und Nenner der rationalen Functionen p gemeinschaftliche Theiler weggestrichen sein können. Um dann nachträglich die Richtigkeit dieser Differentialgleichung zu prüfen, ist in folgender Weise zu verfahren. Für $\frac{ds}{dx}$ bis $\frac{d^{\varrho} s}{dx^{\varrho}}$ bestehen die Ausdrücke No. 3 (2.). Werden dieselben in (1.) eingesetzt, so müssen, weil die n Zweige s abgesehen von einer endlichen Anzahl von Punkten von einander verschieden sind, die Gleichungen identisch bestehen:

$$(2.)\quad \begin{cases} h_{\varrho,i} + p_1 h_{\varrho-1,i}\,\varDelta x + p_2 h_{\varrho-2,i}(\varDelta x)^2 + \cdots + p_{\varrho-1} h_{1,i}(\varDelta x)^{\varrho-1} = 0, & (i=1,\ldots,n-1) \\ g_{\varrho} + p_1 g_{\varrho-1}\,\varDelta x + p_2 g_{\varrho-2}\,(\varDelta x)^2 + \cdots + p_{\varrho-1} g_1\,(\varDelta x)^{\varrho-1} + p_{\varrho}(\varDelta x)^{\varrho} = 0. \end{cases}$$

Und wenn diese Gleichungen bestehen, so erfüllt s die Differentialgleichung (1.). Gemäss No. 3 ist, bei $\varrho > 1$, nothwendig, dass eine Determinante wie (9.) in No. 3:

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} h_{1\alpha_1} & h_{1\alpha_2} & \dots & h_{1\alpha_{\varrho-1}} \\ h_{2\alpha_1} & h_{2\alpha_2} & \dots & h_{2\alpha_{\varrho-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{\varrho-1,\alpha_1} & h_{\varrho-1,\alpha_2} & \dots & h_{\varrho-1,\alpha_{\varrho-1}} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet; eine solche ist anzugeben. Sobald bestätigt ist, dass diese Determinante nicht identisch verschwindet (wozu man für x eine rationale Zahl angeben kann, für welche (3.) nicht verschwindet), so ist damit entschieden, dass die Differentialgleichung (1.) die verlangte Differentialgleiehung ist. Denn wenn letztere von niedrigerer Ordnung wäre, so würde nach dem in No. 3 bei (12.), (13.) Gesagten folgen, dass die Determinante (3.) verschwinden müsste.

Zu verbessern in der Abhandlung des Verfassers Bd. 104:

Seite 22 Zeile 18 von unten ist $\sum\limits_1^\infty$ statt $\sum\limits_0^\infty$ zu setzen.

Seite 28 Zeile 5 von unten ist N statt n zu setzen.

Seite 29 Zeile 21 von unten ist „aus“ statt „und“ zu setzen.

Ueber die Convergenzbereiche der Integrale partieller Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Die verschiedenen Beweise für die Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen oder von Systemen solcher Differentialgleichungen beruhen auf der Vergleichung mit einer partiellen Differentialgleichung, deren allgemeines oder wenigstens vollständiges Integral sich mittels bekannter Functionen in geschlossener Form darstellen lässt, und unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass man entweder das vorgelegte partielle Differentialgleichungsystem durch Einführung neuer abhängiger Variablen, also durch Erhöhung der Klasse, in ein lineares verwandelt und dieses mit einer einfacheren linearen partiellen Differentialgleichung mit einfacher Grenzbedingung vergleicht, oder dass man die Klasse des gegebenen partiellen Differentialgleichungsystemes unverändert lässt und dieses selbst mit einer einfacheren, nicht linearen integrirbaren partiellen Differentialgleichung zusammenstellt.

Ich will hier den Existenzbeweis eines Integrales einer beliebigen partiellen Differentialgleichung $m$ter Ordnung durch Zusammenstellung mit einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung führen, der auf demselben Gedanken beruht, wie der für eine totale Differentialgleichung beliebiger Ordnung von mir gegebene*), und welcher nicht bloss seiner Einfachheit wegen von einigem Interesse sein dürfte, sondern auch gestatten wird, für gewisse Arten partieller Differentialgleichungen den Convergenzbereich der Integrale genauer zu bestimmen.

Mein Beweis für totale Differentialgleichungen $m$ter Ordnung, die man stets auf die Form

*) „Der *Cauchy*sche Satz von der Existenz der Integrale einer Differentialgleichung", dieses Journal Bd. 104 Heft 2.

$$(1.)\qquad y^{(m)} = \sum_0^\infty{}_r A x^\mu y^{\mu_0} y'^{\mu_1} \dots y^{(m-1)\mu_{m-1}} \qquad (\mu+\mu_0+\mu_1+\dots+\mu_{m-1}=r)$$

bringen konnte, deren um die Nullpunkte von $x, y, y', \dots, y^{(m-1)}$ gezogene Convergenzkreise Radien besitzen, die grösser als die Einheit sind*), und für welche dasjenige Integral untersucht werden sollte, das für $x = 0$ nebst seinen $m-1$ ersten Ableitungen verschwindet, beruhte auf der Zusammenstellung von (1.) mit der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2.)\quad z' = M(1+2x+3x^2+\cdots)(1+z+z^2+\cdots)(1+z+z^2+\cdots)\dots(1+z+z^2+\cdots),$$

worin die letzten gleichen Potenzreihen m-mal wiederholt sind, und man erkennt durch unmittelbaren Anblick der verglichenen Formen, dass

$$\operatorname{mod} y_0^{(m+\lambda)} \leqq z_0^{(\lambda+1)}$$

ist, wenn beachtet wird, dass

$$z_0' < z_0'' < z_0''' < \cdots$$

ist**), woraus dann die Convergenz der die Differentialgleichung (1.) formal befriedigenden Potenzreihe unmittelbar erhellt.

---

*) Wenn die gegebene Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$Y^{(m)} = \sum_0^\infty{}_\varrho\, \alpha X^\nu Y^{\nu_0} Y'^{\nu_1} \dots Y^{(m-1)\nu_{m-1}} \qquad (\nu+\nu_0+\nu_1+\dots+\nu_{m-1}=\varrho)$$

lautete, für welche dasjenige Integral untersucht werden sollte, welches für $X = 0$ nebst seinen $m-1$ ersten Ableitungen verschwindet, so sind, wenn der kleinste der Convergenzradien R der um $X = 0$, $Y = 0$, $Y' = 0$, $\dots$, $Y^{(m-1)} = 0$ in bestimmt gewählten Bereichen convergirenden rechten Seite der Differentialgleichung kleiner als die Einheit ist, und r eine positive Grösse kleiner als R bedeutet, zwei positive Zahlen $\varkappa$ und $\varkappa'$ kleiner als r so zu wählen, dass $\frac{\varkappa'}{\varkappa^{m-1}}$ auch noch unter r liegt, und es führt dann die Substitution

$$X = \varkappa x, \quad Y = \varkappa' y$$

die vorgelegte Differentialgleichung in eine andere $m$ter Ordnung über, deren Convergenzbereiche der rechten Seite Radien besitzen, die grösser als die Einheit sind, da

$$\frac{d^\lambda Y}{dX^\lambda} = \frac{\varkappa'}{\varkappa^\lambda}\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}$$

und

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa^\lambda} \leqq \frac{\varkappa'}{\varkappa^{m-1}} < r$$

ist.

**) Wie aus (2.) unmittelbar hervorgeht, indem aus

$$\frac{dz}{dx} = g(x)h(z)$$

Wir wollen zunächst von dieser Beweismethode eine Anwendung auf die Herleitung des Satzes von *Fuchs* über die Ausdehnung des Convergenzbereiches der Integrale totaler linearer Differentialgleichungen geben, um nachher analoge Untersuchungen für die Integrale partieller Differentialgleichungen anzustellen.

Sei die lineare Differentialgleichung $m$ter Ordnung vorgelegt

$$(3.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} = r(x)+r_0(x)y+r_1(x)\frac{dy}{dx}+\cdots+r_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},$$

in welcher $r(x)$, $r_0(x)$, $\ldots$, $r_{m-1}(x)$ in der Umgebung des Punktes $x=a$ nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende convergente Entwickelungen bedeuten, deren kleinster Convergenzradius ϱ sein mag, und werde dasjenige Integral betrachtet, welches für $x=a$ mit seinen $m-1$ ersten Ableitungen die Werthe η, η_1, η_2, $\ldots$, η_{m-1} annimmt, so wird zunächst die Differentialgleichung (3.) vermöge der Substitution

$$(4.)\quad x-a = X,\quad y = Y+\eta+\eta_1 X+\frac{\eta_2}{2!}X^2+\cdots+\frac{\eta_{m-1}}{(m-1)!}X^{m-1}$$

---

durch $(n-1)$- und n-malige Differentiation nach x folgt

$$\frac{d^n z}{dx^n} = g(x)\frac{d^{n-1}h(z)}{dx^{n-1}}+(n-1)g'(x)\frac{d^{n-2}h(z)}{dx^{n-2}}+\cdots+g^{(n-1)}(x)h(z)$$

und

$$\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} = g(x)\frac{d^n h(z)}{dx^n}+ng'(x)\frac{d^{n-1}h(z)}{dx^{n-1}}+\cdots+g^{(n)}(x)h(z),$$

und somit, da

$$g(x) = M(1+2x+3x^2+\cdots)$$

ist,

$$\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_0 = M\left\{\left(\frac{d^{n-1}h(z)}{dx^{n-1}}\right)_0+2(n-1)\left(\frac{d^{n-2}h(z)}{dx^{n-2}}\right)_0 + 3(n-1)(n-2)\left(\frac{d^{n-3}h(z)}{dx^{n-3}}\right)_0+\cdots+n(n-1)\ldots 2.1\,(h(z))_0\right\}$$

und

$$\left(\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}\right)_0 = M\left\{\left(\frac{d^n h(z)}{dx^n}\right)_0+2n\left(\frac{d^{n-1}h(z)}{dx^{n-1}}\right)_0 + 3n(n-1)\left(\frac{d^{n-2}h(z)}{dx^{n-2}}\right)_0+\cdots+(n+1)n(n-1)\ldots 2.1\,(h(z))_0\right\},$$

woraus unmittelbar ersichtlich, dass

$$\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_0 < \left(\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}\right)_0$$

ist.

in

$$(5.)\quad \frac{d^m Y}{dX^m} = R(X)+R_0(X)Y+R_1(X)\frac{dY}{dX}+\cdots+R_{m-1}(X)\frac{d^{m-1}Y}{dX^{m-1}}$$

übergehen, worin $R(X)$, $R_0(X)$, $\ldots$, $R_{m-1}(X)$ um den Nullpunkt von X convergirende Potenzreihen bedeuten, deren kleinster Convergenzradius wiederum ϱ ist, und wofür dasjenige Integral untersucht werden soll, das für $X=0$ mit seinen $m-1$ ersten Ableitungen verschwindet; es sei zugleich noch bemerkt, dass durch die eben vollzogene Transformation die Coefficienten der Reihe $R(X)$ von den Anfangswerthen η, η_1, η_2, $\ldots$, η_{m-1} abhängig werden. Die Substitution

$$(6.)\quad X = \varkappa x,$$

worin $\varkappa=\varrho-\delta$ eine positive Grösse bedeutet, in welcher δ beliebig klein zu denken ist, führt die Differentialgleichung (5.), wenn Y durch y ersetzt wird, in

$$(7.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} = g(x)+g_0(x)y+g_1(x)\frac{dy}{dx}+\cdots+g_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

über, in welcher $g(x)$, $g_0(x)$, $\ldots$, $g_{m-1}(x)$ um $x=0$ herum convergirende Reihen sind, von denen der Convergenzradius der einen die Einheit, die der anderen gleich oder grösser als die Einheit sind, und für welche wiederum dasjenige Integral zu untersuchen ist, welches für $x=0$ nebst seinen $m-1$ ersten Ableitungen verschwindet. Da nun vermöge dieser den Einheitskreis einschliessenden Convergenzbereiche der Reihen die Moduln ihrer Coefficienten ebenfalls eine convergente Reihe bilden müssen, so lässt sich eine positive Grösse M angeben, unter welcher diese sämmtlich liegen müssen, und wir stellen nunmehr mit der Differentialgleichung (7.) zur Vergleichung die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = M(1+x+x^2+\cdots)+M(1+x+x^2+\cdots)z \\ \qquad\qquad +M(1+x+x^2+\cdots)z+\cdots+M(1+x+x^2+\cdots)z \end{cases}$$

oder

$$(9.)\quad \frac{dz}{dx} = \frac{M}{1-x}(1+mz)$$

zusammen und mit dem oben näher bezeichneten Integrale von (7.) dasjenige Integral der Differentialgleichung (9.), welches für $x=0$ selbst verschwindet; dann folgt aus (7.) und (8.) unmittelbar, dass

$$(10.)\quad \operatorname{mod}\left(\frac{d^{m+\lambda}y}{dx^{m+\lambda}}\right)_0 < \left(\frac{d^{\lambda+1}z}{dx^{\lambda+1}}\right)_0,$$

da wieder

$$\left(\frac{d^\nu z}{dx^\nu}\right)_0 < \left(\frac{d^{\nu+1} z}{dx^{\nu+1}}\right)_0$$

ist. Da nun aber das Integral der Differentialgleichung (9.), welches selbst für $x = 0$ verschwinden soll, durch die Beziehung

$$(11.) \qquad z = \frac{1-(1-x)^{Mm}}{m(1-x)^{Mm}}$$

gegeben ist, oder durch die innerhalb des Einheitskreises convergirende Reihenentwickelung

$$(12.) \qquad z = Mx + \frac{M(Mm+1)}{1.2}x^2 + \frac{M(Mm+1)(Mm+2)}{1.2.3}x^3 + \cdots,$$

so wird die Reihe

$$(13.) \qquad y = \left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_0 \frac{x^m}{m!} + \left(\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}\right)_0 \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots,$$

in welcher die Grössen

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_0, \quad \left(\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}\right)_0, \quad \ldots$$

aus der Differentialgleichung (7.) durch successive Differentiation abgeleitet sind, einerseits ein formales Integral von (7.) mit den gegebenen Anfangsbedingungen sein, andererseits vermöge der Ungleichheit (10.) eine mindestens im Einheitskreise convergente Potenzreihe darstellen, und es ergiebt sich somit in der angegebenen höchst einfachen Weise das von *Fuchs* aufgestellte Theorem, wonach die nach dem *Cauchy*schen Satze für die lineare Differentialgleichung (3.), in welcher die Coefficienten um $x = a$ herum convergirende Potenzreihen bedeuten, stets existirende, in der Umgebung von $x = a$ convergirende Integralreihe, von den Werthen von y und dessen Ableitungen unabhängig, mindestens den Convergenzbereich besitzt, welcher der kleinste der Convergenzbereiche der Reihen $r(x)$, $r_0(x)$, $r_1(x)$, $\ldots$, $r_{m-1}(x)$ ist.

Für keine andere Klasse algebraischer Differentialgleichungen als für die linearen liefert diese Art der Vergleichung eine von den Anfangswerthen des y und dessen Ableitungen unabhängige Convergenzgrenze. Denn sei

$$(14.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \Sigma \varphi(x) y^{a_0} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{a_1} \cdots \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)^{a_{m-1}}$$

gegeben, worin die Functionen $\varphi(x)$ um $x = a$ herum innerhalb gewisser

Bereiche convergirende Reihen bedeuten, und sei dasjenige Integral zu untersuchen, welches durch

$$(15.)\quad (y)_{x=a}=\eta,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=\eta_1,\quad \ldots,\quad \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_{x=a}=\eta_{m-1}$$

bestimmt ist, so wird zunächst wieder die Substitution

$$(16.)\quad x-a=X,\quad y=Y+\eta+\eta_1X+\frac{\eta_2}{2!}X^2+\cdots+\frac{\eta_{m-1}}{(m-1)!}X^{m-1}$$

die Differentialgleichung in die Form überführen

$$(17.)\qquad \frac{d^mY}{dX^m}=\Sigma\psi(X)Y^{\beta_0}\left(\frac{dY}{dX}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\frac{d^{m-1}Y}{dX^{m-1}}\right)^{\beta_{m-1}},$$

für welche dasjenige Integral in der Umgebung von $X=0$ zu untersuchen ist, welches durch

$$(18.)\qquad (Y)_0=\left(\frac{dY}{dX}\right)_0=\cdots=\left(\frac{d^{m-1}Y}{dX^{m-1}}\right)_0$$

bestimmt ist, und worin die Coefficienten der um den Nullpunkt von X convergirenden Potenzreihen $\psi(X)$ nunmehr auch von den Anfangswerthen η, $\eta_1,\ \ldots,\ \eta_{m-1}$ abhängen. Sei wiederum der kleinste der zu den Reihen $\varphi(x)$ oder $\psi(X)$ gehörigen Convergenzradien ϱ, so wird die Substitution (6.), wenn wiederum Y durch y ersetzt wird, die Differentialgleichung (17.) in

$$(19.)\qquad \frac{d^my}{dx^m}=\Sigma g(x)y^{\gamma_0}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\gamma_1}\cdots\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)^{\gamma_{m-1}}$$

überführen, in welcher die Functionen $g(x)$ um $x=0$ herum convergirende Reihen bedeuten, von denen der Convergenzradius einer derselben die Einheit, die der andern gleich oder grösser als die Einheit sind, und für welche dasjenige Integral zu untersuchen ist, das für $x=0$ mit seinen $m-1$ ersten Ableitungen verschwindet. Da man nunmehr wiederum aus oben angegebenen Gründen eine endliche positive Grösse M bestimmen kann, welche grösser ist als die Moduln der Coefficienten der Reihen $g(x)$, so stelle man mit (19.) die Differentialgleichung

$$(20.)\qquad \frac{dz}{dx}=\Sigma M(1+x+x^2+\cdots)z^{\gamma_0}z^{\gamma_1}\ldots z^{\gamma_{m-1}}$$

oder

$$(21.)\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{M}{1-x}\Sigma z^{\gamma_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_{m-1}},$$

und mit dem oben näher bezeichneten Integrale dasjenige Integral der Differentialgleichung (21.) zusammen, welches für $x=0$ selbst verschwindet,

dann folgt aus (19.) und (21.) wieder unmittelbar, dass

$$\text{(22.)} \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{d^{m+\lambda}y}{dx^{m+\lambda}}\right)_0 < \left(\frac{d^{\lambda+1}z}{dx^{\lambda+1}}\right)_0,$$

da

$$\left(\frac{d^{\nu}z}{dx^{\nu}}\right)_0 < \left(\frac{d^{\nu+1}z}{dx^{\nu+1}}\right)_0$$

ist, und es wird aus denselben Gründen wie oben das gesuchte Integral der Differentialgleichung (19.) eine um $x = 0$ herum convergirende Potenzreihe sein, deren Bereich gleich oder grösser ist als der Bereich der für $x = 0$ selbst verschwindenden Potenzreihe, welche das Integral von (21.) darstellt; es fragt sich nun, ob der Convergenzbereich der letzteren Reihe wiederum der Einheitskreis sein kann, so dass das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung (14.) mindestens den kleinsten der Convergenzbereiche der Reihen $\varphi(x)$ besitzt, der also von den Anfangswerthen von y und dessen $m-1$ ersten Ableitungen unabhängig ist. Da aber die Differentialgleichung (21.) in die Form gesetzt werden kann

$$\text{(23.)} \qquad \frac{dz}{\lambda_0 z^{\varepsilon_0} + \lambda_1 z^{\varepsilon_1} + \cdots + \lambda_\delta z^{\varepsilon_\delta}} = M\frac{dx}{1-x},$$

worin $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_\delta, \lambda_0, \ldots, \lambda_\delta$ positive ganze Zahlen, 0 ausgeschlossen*), bedeuten, und somit für das gesuchte Integral

$$\text{(24.)} \qquad \int_0^z \frac{dz}{\lambda_0 z^{\varepsilon_0} + \lambda_1 z^{\varepsilon_1} + \cdots + \lambda_\delta z^{\varepsilon_\delta}} = -M\log(1-x)$$

folgt, so fragt es sich, wann die Umkehrung des Integrales eine Potenzreihe von x liefert, welche den Einheitskreis zum Convergenzbereich hat; da aber $\log(1-x)$ im Einheitskreise die Werthe $0, \ldots, \infty$ durchläuft, so ist die Frage darauf reducirt, wie die ganze Function von z, welche den Nenner des Integranden bildet, beschaffen sein muss, damit die Umkehrung des Integrales

$$\text{(25.)} \qquad \int_0^z \frac{dz}{\lambda_0 z^{\varepsilon_0} + \lambda_1 z^{\varepsilon_1} + \cdots + \lambda_\delta z^{\varepsilon_\delta}} = u$$

eine in der ganzen u-Ebene convergente *Maclaurin*sche Reihe darstellt; aber es ist bekannt, dass eine so beschaffene Umkehrung nur dann existirt, wenn

*) Es ist klar, dass $\varepsilon_0 = 0$ sein muss, da, wenn in (19.) nicht auf der rechten Seite ein von y und dessen $m-1$ ersten Ableitungen unabhängiges Glied vorkäme, vermöge der gewählten Anfangsbedingungen sämmtliche Ableitungen des Integrales für $x = 0$ verschwinden würden.

die ganze Function von z eine lineare ist, was somit die Differentialgleichung (19.) auf den früher behandelten Fall der linearen Differentialgleichungen $m$ter Ordnung zurückführt.

Ich will auf die Bestimmung solcher Arten algebraischer Differentialgleichungen, für welche sich vermöge des eben angewandten Vergleichungsprincips für gleiche Anfangswerthe eine gemeinsame Convergenzgrenze der Integrale angeben lässt, nicht weiter eingehen und nur einen speciellen Fall hervorheben, dessen Untersuchung ein sehr einfaches Resultat ergiebt.

Sei die gegebene Differentialgleichung (19.) so beschaffen, dass die Dimension der einzelnen Posten

$$\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_{m-1}$$

nicht in zwei Posten dieselbe ist, wobei die rechte Seite der Differentialgleichung entweder eine ganze Function von y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ oder auch nur den Charakter einer ganzen Function dieser Grössen hat, so wird jedenfalls

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^{m+\lambda}y}{dx^{m+\lambda}}\right)_0 < \left(\frac{d^{\lambda+1}z}{dx^{\lambda+1}}\right)_0$$

sein, wenn z als das mit $x=0$ verschwindende Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{M}{1-x}\cdot\frac{1}{1-z} \tag{26.}$$

definirt wird, und somit wird die um $x=0$ herum convergirende Integralreihe der gegebenen Differentialgleichung jedenfalls den Convergenzbereich des Integrales von (26.)

$$z = 1-\sqrt{1+2M\log(1-x)} \tag{27.}$$

besitzen, somit einen Convergenzkreis, dessen Radius durch die Auflösung der Gleichung

$$\log(1-x) = -\frac{1}{2M} \quad \text{oder} \quad x = 1-e^{-\frac{1}{2M}}$$

gegeben ist, also für alle diese Differentialgleichungen nur von der Grösse M abhängt.

Wir wenden nun die hier befolgte Methode der Beweisführung der Existenz der Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen auf partielle Differentialgleichungen an.

Sei eine partielle Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$(28.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^m u}{\partial z_1^m} = f\Big(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\mu,\ u,\ \dfrac{\partial u}{\partial z_1},\ \ldots,\ \dfrac{\partial u}{\partial z_\mu}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_1^2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^m u}{\partial z_1^{m-1}\partial z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^m u}{\partial z_\mu^m}\Big) \end{cases}$$

gegeben und werde ein Integral dieser Differentialgleichung gesucht, welches nebst seinen nach z_1 genommenen $m-1$ ersten Ableitungen für $z_1 = a_1$ in die Functionen von $z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_\mu$

$$(29.)\quad \begin{cases} (u)_{z_1=a_1} = \omega_0(z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_\mu),\ \ \left(\dfrac{\partial u}{\partial z_1}\right)_{z_1=a_1} = \omega_1(z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_\mu),\ \ \ldots, \\ \qquad \left(\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial z_1^{m-1}}\right)_{z_1=a_1} = \omega_{m-1}(z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_\mu) \end{cases}$$

übergeht, so soll gezeigt werden,

dass, wenn die Functionen $\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_{m-1}$ *in der Umgebung eines Werthesystemes* $a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_\mu$ *nach ganzen positiven Potenzen von* z_2-a_2, $z_3-a_3,\ \ldots,\ z_\mu-a_\mu$ *entwickelbar sind, und ferner die rechte Seite der partiellen Differentialgleichung in der Umgebung der Werthe* $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_\mu$ *und der für u und dessen Ableitungen aus* (29.) *und deren Differentialquotienten sich ergebenden Werthe*

$$(30.)\quad \begin{cases} (u)_{a_1,a_2,\ldots,a_\mu} = \omega_0(a_2,\ldots,a_\mu) = b_0,\ \ \left(\dfrac{\partial u}{\partial z_1}\right)_{a_1,a_2,\ldots,a_\mu} = \omega_1(a_2,\ \ldots,\ a_\mu) = b_1,\ \ \ldots, \\ \qquad \left(\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial z_1^{m-1}}\right)_{a_1,a_2,\ldots,a_\mu} = \omega_{m-1}(a_2,\ \ldots,\ a_\mu) = b_{m-1}, \\ \left(\dfrac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\mu} u}{\partial z_1^{\lambda_1}\partial z_2^{\lambda_2}\ldots\partial z_\mu^{\lambda_\mu}}\right)_{a_1,a_2,\ldots,a_\mu} = \left(\dfrac{\partial^{\lambda_2+\cdots+\lambda_\mu}\omega_{\lambda_1}(z_2,\ \ldots,\ z_\mu)}{\partial z_2^{\lambda_2}\ldots\partial z_\mu^{\lambda_\mu}}\right)_{a_2,\ldots,a_\mu} = b_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu}, \end{cases}$$

worin $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\mu \leqq m$, *und die Combinationen* $\lambda_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_\mu = 0$ *auszuschliessen sind, in eine convergente Taylorsche Reihe aller auf der rechten Seite der Gleichung* (28.) *befindlichen Grössen sich entwickeln lässt, dann auch das gesuchte Integral, welches den Bedingungen* (29.) *Genüge leistet, nach positiven steigenden ganzen Potenzen von* z_1-a_1, $z_2-a_2,\ \ldots,\ z_\mu-a_\mu$ *entwickelbar ist.*

Um die Form des Beweises zu vereinfachen, führen wir neue unabhängige Variable durch die Substitutionen ein

$$(31.)\qquad z_1-a_1 = Z_1,\quad z_2-a_2 = Z_2,\quad \ldots,\quad z_\mu-a_\mu = Z_\mu,$$

und eine neue abhängige Variable U durch die Gleichung

$$(32.)\quad \begin{cases} u = U+\omega_0(Z_2+a_2,\ \dots,\ Z_\mu+a_\mu)+\omega_1(Z_2+a_2,\ \dots,\ Z_\mu+a_\mu)\dfrac{Z_1}{1!} \\ +\omega_2(Z_2+a_2,\ \dots,\ Z_\mu+a_\mu)\dfrac{Z_1^2}{2!}+\dots+\omega_{m-1}(Z_2+a_2,\ \dots,\ Z_\mu+a_\mu)\dfrac{Z_1^{m-1}}{(m-1)!}, \end{cases}$$

dann wird die Differentialgleichung (28.) in

$$(33.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^m U}{\partial Z_1^m} = F\Big(Z_1,\ Z_2,\ \dots,\ Z_\mu,\ U,\ \dfrac{\partial U}{\partial Z_1},\ \dots,\ \dfrac{\partial U}{\partial Z_\mu},\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial Z_1^2},\ \dots, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^m U}{\partial Z_1^{m-1}\partial Z_2},\ \dots,\ \dfrac{\partial^m U}{\partial Z_\mu^m}\Big) \end{cases}$$

übergehen, in welcher der oben getroffenen Bestimmung zufolge dem Werthe $Z_1 = 0$ jetzt die Werthe

$$(34.)\quad (U)_{Z_1=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial Z_1}\right)_{Z_1=0} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Z_1^2}\right)_{Z_1=0} = \dots = \left(\frac{\partial^{m-1} U}{\partial Z_1^{m-1}}\right)_{Z_1=0} = 0$$

also auch die Nullwerthe aller anderen auf der rechten Seite von (33.) enthaltenen Grössen entsprechen, deren rechte Seite ferner um die Nullpunkte aller in ihr enthaltenen Grössen in convergente Potenzreihen entwickelbar ist, und für welche gezeigt werden soll, dass das Integral, welches den Anfangsbedingungen (34.) Genüge leistet, nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $Z_1,\ Z_2,\ \dots,\ Z_\mu$ entwickelbar ist.

Sind die Convergenzradien für alle Grössen der rechten Seite von (33.) sämmtlich grösser als die Einheit, so werden, da die Reihen für den Einheitswerth sämmtlicher Variablen convergiren müssen, die Reihen der Coefficienten selbst convergent sein und somit ihre Moduln sämmtlich unter einer endlichen Grenze liegen; sind jedoch alle oder einzelne der Convergenzradien kleiner als die Einheit, so sei der kleinste derselben, der also kleiner als 1 ist, R und r eine positive Grösse $< R$, und man bestimme nunmehr zwei positive Grössen $\varkappa$ und $\varkappa' < r$ derart, dass auch noch $\frac{\varkappa'}{\varkappa^m} < r$ ist, was stets möglich, da $\frac{\varkappa'}{\varkappa^m}$ für $\varkappa' = 0$ verschwindet und für $\varkappa' = \varkappa^m$ der Einheit gleich wird, so dass

$$\varkappa,\quad \varkappa',\quad \frac{\varkappa'}{\varkappa},\quad \frac{\varkappa'}{\varkappa^2},\quad \dots,\quad \frac{\varkappa'}{\varkappa^m}$$

sämmtlich kleiner als r sind. Setzt man nun

$$(35.)\quad Z_1 = \varkappa x_1,\quad Z_2 = \varkappa x_2,\quad \dots,\quad Z_\mu = \varkappa x_\mu,\quad U = \varkappa' y,$$

also

$$\frac{\partial^\nu U}{\partial Z_1^{\nu_1}\dots\partial Z_\mu^{\nu_\mu}} = \frac{\varkappa'}{\varkappa^\nu}\frac{\partial^\nu y}{\partial x_1^{\nu_1}\dots\partial x_\mu^{\nu_\mu}},$$

so wird die rechte Seite von (33.) um die Nullpunkte der in ihr enthaltenen Grössen

$$x_1,\quad x_2,\quad \dots,\quad x_\mu,\quad y,\quad \frac{\partial y}{\partial x_1},\quad \dots,\quad \frac{\partial y}{\partial x_\mu},$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2},\quad \dots,\quad \frac{\partial^m y}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2},\quad \dots,\quad \frac{\partial^m y}{\partial x_\mu^m}$$

in Kreisen convergiren, deren Radien grösser als die Einheit sind, und die Moduln ihrer Coefficienten somit wieder unter einer endlichen Grenze liegen müssen; es wird somit der zu beweisende Fundamentalsatz nunmehr folgendermassen lauten:

Wenn in der partiellen Differentialgleichung mter Ordnung

$$(36.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^m y}{\partial x_1^m} = f\Big(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_\mu,\ y,\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1},\ \dots,\ \dfrac{\partial y}{\partial x_\mu}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2},\ \dots,\ \dfrac{\partial^m y}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2},\ \dots,\ \dfrac{\partial^m y}{\partial x_\mu^m}\Big) \end{cases}$$

die rechte Seite derselben um die Nullpunkte aller in ihr vorkommenden Grössen in eine convergente Maclaurinsche Reihe entwickelbar ist, deren Coefficientenmoduln unter einer endlichen Grenze liegen, so existirt stets ein und nur ein um die Nullpunkte von x_1, x_2, $\dots$, x_μ in eine convergente Potenzreihe entwickelbares Integral dieser Differentialgleichung, welches nebst seinen $m-1$ ersten nach x_1 genommenen Ableitungen für $x_1 = 0$ verschwindet.

Beachtet man, dass die Anzahl der auf der rechten Seite der Differentialgleichung (36.) enthaltenen Ableitungen λter Ordnung

$$\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+\lambda-1)}{1.2.3\dots\lambda}$$

ist und setzt

$$(38.)\qquad 1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}+\dots+\frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+m-2)}{1.2\dots(m-1)} = N$$

und

$$(38.)\qquad \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+m-1)}{1.2\dots m} = n,$$

so stelle man, wenn M eine positive Zahl bedeutet, welche grösser als der grösste Modul der Coefficienten der Differentialgleichung (36.) ist, wiederum, ähnlich wie oben für gewöhnliche Differentialgleichungen, die partielle Differentialgleichung $m$ter Ordnung (36.) mit der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(39.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = M(1+x_1+x_1^2+\cdots)(1+x_2+x_2^2+\cdots)\cdots(1+x_\mu+x_\mu^2+\cdots) \\ (1+v+v^2+\cdots)(1+v+v^2+\cdots)\cdots(1+v+v^2+\cdots) \\ \left(1+\dfrac{\partial v}{\partial x_2}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2+\cdots\right)\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial x_3}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2+\cdots\right)\cdots \\ \qquad\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial x_\mu}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_\mu}\right)^2+\cdots\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(1+\dfrac{\partial v}{\partial x_2}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2+\cdots\right)\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial x_3}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2+\cdots\right)\cdots \\ \qquad\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial x_\mu}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_\mu}\right)^2+\cdots\right) \end{cases}$$

zusammen, worin die Reihe $1+v+v^2+\cdots$ N-mal, die Reihen

$$1+\frac{\partial v}{\partial x_\nu}+\left(\frac{\partial v}{\partial x_\nu}\right)^2+\cdots$$

je $n-1$-mal wiederholt werden, oder auch mit der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(40.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = M\Big\{1+\Big(x_1+x_2+\cdots+x_\mu+v+v+\cdots+v+\dfrac{\partial v}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v}{\partial x_3}+\cdots+\dfrac{\partial v}{\partial x_\mu} \\ \qquad +\cdots+\dfrac{\partial v}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v}{\partial x_3}+\cdots+\dfrac{\partial v}{\partial x_\mu}\Big) \\ \quad +\Big(x_1+x_2+\cdots+x_\mu+v+v+\cdots+v+\dfrac{\partial v}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v}{\partial x_3}+\cdots+\dfrac{\partial v}{\partial x_\mu} \\ \qquad +\cdots+\dfrac{\partial v}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v}{\partial x_3}+\cdots+\dfrac{\partial v}{\partial x_\mu}\Big)^2 \\ \quad +\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad +\cdots\cdots\cdots\cdots\Big\} \end{cases}$$

zusammen, worin in jeder der Klammern die Function v N-mal, die Summe $\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_3}+\cdots+\frac{\partial v}{\partial x_\mu}$ $n-1$-mal wiederholt ist, oder, was dasselbe ist, mit je einer der partiellen Differentialgleichungen

$$(41.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = \dfrac{M}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_\mu)}\,\dfrac{1}{(1-v)^N} \\ \qquad\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{\partial v}{\partial x_2}}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\partial v}{\partial x_3}}\cdots\dfrac{1}{1-\dfrac{\partial v}{\partial x_\mu}}\right)^{n-1} \end{cases}$$

oder

$$(42.)\quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{M}{1-\left[x_1+x_2+\cdots+x_\mu+Nv+(n-1)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_3}+\cdots+\frac{\partial v}{\partial x_\mu}\right)\right]},$$

und man erkennt dann wieder durch den blossen Anblick der rechten Seiten von (36.), (39.), (40.), dass für das oben definirte Integral y und dasjenige Integral v der Differentialgleichung (41.) resp. (42.), welches für $x_1 = 0$ identisch verschwindet,

$$(43.)\quad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{m+\lambda} y}{\partial x_1^{m+\lambda}}\right)_{x_1=x_2=\cdots=x_\mu=0} < \left(\frac{\partial^{\lambda+1} v}{\partial x_1^{\lambda+1}}\right)_{x_1=x_2=\cdots=x_\mu=0}$$

ist. Da nun aber aus der Form der mit einander verglichenen partiellen Differentialgleichungen unmittelbar hervorgeht, dass

$$\left(\frac{\partial^{m+\lambda} y}{\partial x_1^{m+\lambda}}\right)_{x_1=0} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^{\lambda+1} v}{\partial x_1^{\lambda+1}}\right)_{x_1=0}$$

nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$ fortschreitende convergente Reihen sind, deren Moduln für $x_2 = x_3 = \cdots = x_\mu = 0$ der Ungleichung (43.) unterworfen sind, so folgt, dass es um die Nullpunkte von $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$ sich erstreckende Bereiche giebt, innerhalb deren auch

$$(44.)\quad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{m+\lambda} y}{\partial x_1^{m+\lambda}}\right)_{x_1=0} < \left(\frac{\partial^{\lambda+1} v}{\partial x_1^{\lambda+1}}\right)_{x_1=0}$$

ist, und daraus ergiebt sich wiederum, dass, wenn das in Frage kommende Integral der Differentialgleichungen (41.), resp. (42.) in eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist — was wir nachweisen werden — dann auch das den aufgestellten Anfangsbedingungen genügende Integral der Differentialgleichung (36.) mindestens in denselben Bereichen denselben Charakter haben wird.

Setzen wir nun zum Zwecke der Integration der Differentialgleichung (42.)

$$(45.)\quad x_1 = z_1, \quad x_2+x_3+\cdots+x_\mu = z_2,$$

so geht dieselbe in

$$(46.)\quad \frac{\partial v}{\partial z_1} = \frac{M}{1-z_1-z_2-Nv-(n-1)(\mu-1)\frac{\partial v}{\partial z_2}}$$

über, für welche das mit z_1 identisch verschwindende Integral zu untersuchen ist.

Setzt man

$$(47.)\qquad \frac{(n-1)(\mu-1)}{N} = P$$

und

$$(48.)\qquad 1-z_1-z_2-Nv = V-P,$$

so geht die Differentialgleichung (46.) in

$$(49.)\qquad \left(1+\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)\left(V+P\frac{\partial V}{\partial z_2}\right) = -MN$$

über, für welche das durch die Anfangsbedingung

$$(50.)\qquad (V)_{z_1=0} = 1+P-z_2$$

bestimmte Integral zu ermitteln ist. Setzt man nun zum Zwecke der Auffindung dieses Integrales

$$(51.)\qquad V+P\frac{\partial V}{\partial z_2} = \varphi,\quad 1+\frac{\partial V}{\partial z_1} = -\frac{MN}{\varphi},$$

so reducirt sich die Differentialgleichung (49.) auf die lineare Differentialgleichung

$$(52.)\qquad \varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}-MNP\frac{\partial\varphi}{\partial z_2} = -\varphi(\varphi+MN),$$

deren allgemeines Integral sich nach bekannten Methoden in der Form ergiebt

$$(53.)\qquad z_1+\varphi-MN\log(\varphi+MN) = \omega\left(z_2+P\log\frac{\varphi+MN}{\varphi}\right),$$

worin für unseren Fall die willkürliche Function ω so zu bestimmen ist, dass, wie aus (50.) und (51.) ersichtlich,

$$(54.)\qquad (\varphi)_{z_1=0} = 1-z_2$$

wird oder dass nach (53.) der Gleichung identisch genügt wird:

$$(55.)\quad 1-z_2-MN\log(1+MN-z_2) = \omega(z_2+P\log(1+MN-z_2)-P\log(1-z_2)).$$

Setzt man nun das Argument der ω-Function gleich t und drückt durch Umkehrung z_2 durch t aus, so erhält man vermöge der Gleichung (55.) den analytischen Ausdruck für $\omega(t)$, und daraus unmittelbar vermöge (53.) und (55.) durch eine einfache Betrachtung*) φ, also auch v mit der Anfangsbedingung, dass dasselbe für $z_1=0$, also $x_1=0$ identisch verschwindet, als eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ fortschreitende in bestimmten Bereichen convergente Reihe — wodurch der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

*) S. meine Arbeit: Ueber den Existenzbeweis der Integrale partieller Differentialgleichungen. Mathemat. Annalen, Bd. 42.

Wir wollen nun, nachdem der Beweis für die Existenz der Integrale beliebiger partieller Differentialgleichungen $m$ter Ordnung auf genau denselben Principien wie für gewöhnliche Differentialgleichungen aufgebaut worden, jetzt auch dieses Princip für *lineare* partielle Differentialgleichungen zu verwerthen suchen und feststellen, ob analoge Sätze zu den oben für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen in Betreff der Convergenzgrenze der Integrale hervorgehobenen existiren.

Sei die lineare partielle Differentialgleichung vorgelegt

$$(56.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^m u}{\partial z_1^m} = A+A_0 u+A_1\dfrac{\partial u}{\partial z_1}+\cdots+A_\mu\dfrac{\partial u}{\partial z_\mu}+B_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}+B_2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial z_2}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+C\dfrac{\partial^m u}{\partial z_1^{m-1}\partial z_2}+\cdots+D\dfrac{\partial^m u}{\partial z_\mu^m}, \end{cases}$$

und werde ein Integral gesucht, welches nebst seinen nach z_1 genommenen $m-1$ ersten Ableitungen für $z_1 = a_1$ in die Functionen von $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$

$$(57.)\quad \begin{cases} (u)_{z_1=a_1} = \omega_0(z_2, \ldots, z_\mu), \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial z_1}\right)_{z_1=a_1} = \omega_1(z_2, \ldots, z_\mu), \quad \ldots, \\ \qquad \left(\dfrac{\partial u}{\partial z_\mu}\right)_{z_1=a_1} = \omega_{m-1}(z_2, \ldots, z_\mu) \end{cases}$$

übergeht, so ergiebt sich zunächst aus dem oben bewiesenen Satze bei Beachtung der linearen Form von (56.),

dass, wenn die Functionen $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{m-1}$ in der Umgebung eines Werthesystemes $a_2, a_3, \ldots, a_\mu$ nach ganzen positiven Potenzen von $z_2-a_2, \ldots, z_\mu-a_\mu$ entwickelbar sind und ferner die Darstellungen der Coefficienten $A, A_0, A_1, \ldots, A_\mu, B_1, B_2, \ldots, C, \ldots, D$ der rechten Seite der Differentialgleichung in der Umgebung der Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ nach ganzen positiven Potenzen von $z_1-a_1, z_2-a_2, \ldots, z_\mu-a_\mu$ fortschreiten, dann auch das gesuchte Integral, welches den Bedingungen (57.) *Genüge leistet, nach positiven ganzen Potenzen von $z_1-a_1, z_2-a_2, \ldots, z_\mu-a_\mu$ entwickelbar ist.*

Macht man nunmehr wieder auf die Differentialgleichung (56.) die Substitutionen (31.), (32.), so geht dieselbe in

$$(58.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^m U}{\partial Z_1^m} = \alpha+\alpha_0 U+\alpha_1\dfrac{\partial U}{\partial Z_1}+\cdots+\alpha_\mu\dfrac{\partial U}{\partial Z_\mu}+\beta_1\dfrac{\partial^2 U}{\partial Z_1^2}+\beta_2\dfrac{\partial^2 U}{\partial Z_1\partial Z_2}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+\gamma\dfrac{\partial^m U}{\partial Z_1^{m-1}\partial Z_2}+\cdots+\delta\dfrac{\partial^m U}{\partial Z_\mu^m} \end{cases}$$

über, in welcher den getroffenen Bestimmungen zufolge dem Werthe $Z_1 = 0$

jetzt die Werthe

$$(59.)\qquad (U)_{Z_1=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial Z_1}\right)_{Z_1=0} = \cdots = \left(\frac{\partial^{m-1} U}{\partial Z_1^{m-1}}\right)_{Z_1=0} = 0$$

entsprechen, und für welche die Coefficienten $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \gamma, \ldots, \delta$ um die Nullpunkte von $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ in convergente Potenzreihen entwickelbar sind.

Mögen nun bei Ausdehnung des Convergenzkreises, der zur Variabeln Z_1 gehört, bis zur äussersten Grenze (bei zugehöriger Zusammenziehung der Convergenzbereiche für die anderen Variabeln) die Convergenzradien der μ Variabeln für die Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \delta$ mit

$$\begin{array}{llll} R_{01}, & R_{02}, & \ldots, & R_{0\mu}, \\ R_{11}, & R_{12}, & \ldots, & R_{1\mu}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

bezeichnet werden, und sei ϱ_1 der kleinste der auf die Variable Z_1 bezüglichen Convergenzradien $R_{01}, R_{11}, \ldots$, so nehme man für die Variabeln $Z_2, Z_3, \ldots, Z_\mu$ solche Bereiche um die Nullpunkte, für welche sämmtliche Coefficienten, wenn die Variable Z_1 aus dem durch ϱ_1 bezeichneten Bereiche genommen wird, convergiren, und bezeichne die Radien dieser Convergenzkreise mit $\varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_\mu$. Um nun den durch die Kreise mit den Radien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\mu$ bezeichneten gemeinsamen Convergenzraum aller Coefficienten der Differentialgleichung (58.) mit den Einheitskreisen in Beziehung zu setzen, mache man die Substitutionen

$$(60.)\qquad Z_1 = \varkappa_1 x_1, \quad Z_2 = \varkappa_2 x_2, \quad \ldots, \quad Z_\mu = \varkappa_\mu x_\mu,$$

worin

$$\varkappa_1 = \varrho_1 - \delta_1, \quad \varkappa_2 = \varrho_2 - \delta_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_\mu = \varrho_\mu - \delta_\mu$$

positive Grössen bedeuten, in denen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\mu$ beliebig klein zu denken sind, wodurch die Differentialgleichung (58.), wenn U durch y ersetzt wird, in

$$(61.)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^m y}{\partial x_1^m} = g + g_0 y + g_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + \cdots + g_\mu \frac{\partial y}{\partial x_\mu} + h_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + h_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots \\ \cdots + e \frac{\partial^m y}{\partial x_1^{m-1} \partial x_2} + \cdots + f \frac{\partial^m y}{\partial x_\mu^m} \end{aligned} \right.$$

übergeführt werden möge, in welcher $g, g_0, g_1, \ldots, h_1, \ldots, e, \ldots, f$ um $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_\mu = 0$ convergirende Potenzreihen darstellen und zwar von der Beschaffenheit, dass mindestens einer der Coefficienten der Differentialgleichung in Bezug auf x_1 den Convergenzradius 1, die übrigen einen

Convergenzradius grösser als die Einheit besitzen, während die zugehörigen Convergenzkreise in Bezug auf die Variablen $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$ entweder der Einheitskreis selbst sind oder diesen umschliessen, und für welche wieder dasjenige Integral zu untersuchen ist, welches mit seinen $m-1$ ersten nach x_1 genommenen partiellen Ableitungen für $x_1 = 0$ identisch verschwindet.

Da nach dieser Transformation die Coefficientenreihen der Potenzreihen $g, g_0, g_1, \ldots, h, \ldots, e, \ldots, f$ selbst convergent sind, also eine positive endliche Grenze M angebbar ist, unter welcher ihre sämmtlichen Moduln liegen, und welche offenbar von den in den Anfangsbedingungen (57.) enthaltenen Constanten abhängig ist, so wird nach dem oben angewandten Princip die Vergleichung der Differentialgleichung (61.) mit der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(62.)\quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{M}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_\mu)}\left\{1+Nv+(n-1)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_3}+\cdots+\frac{\partial v}{\partial x_\mu}\right)\right\}$$

für dasjenige Integral v, welches für $x_1 = 0$ selbst identisch verschwindet, wiederum

$$\operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{m+\lambda} y}{\partial x_1^{m+\lambda}}\right)_{x_1=0} < \left(\frac{\partial^{\lambda+1} v}{\partial x_1^{\lambda+1}}\right)_{x_1=0}$$

liefern, und daher das in Frage kommende Integral der Differentialgleichung (61.) jedenfalls innerhalb der um $x_1 = x_2 = \cdots = x_\mu = 0$ beschriebenen Kreise convergiren, welche die Convergenzbereiche des mit $x_1 = 0$ identisch verschwindenden Integrales der Differentialgleichung (62.) bilden, und es erübrigt somit, nur das Integral der Differentialgleichung (62.) zu untersuchen, wobei es genügt, den Fall von zwei unabhängigen Variabeln x_1 und x_2 zu behandeln, für den

$$N = 1, \quad n = 2$$

ist.

Sei also die Differentialgleichung

$$(63.)\qquad \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{M}{(1-x_1)(1-x_2)}\left(1+v+\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)$$

vorgelegt, für welche das mit $x_1 = 0$ identisch verschwindende Integral untersucht werden soll, so liefert das totale Differentialgleichungsystem

$$(64.)\qquad dx_1 = -\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{M}\,dx_2 = \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{M(1+v)}\,dv$$

die Integralgleichungen

$$(65.)\qquad \log(1+v)+x_2 = c_1, \quad M\log(1-x_1)-x_2+\frac{x_2^2}{2} = c_2,$$

so dass das allgemeine Integral von (63.) in der Form enthalten ist

$$(66.)\qquad \log(1+v)+x_2 = \varphi\left\{M\log(1-x_1)-x_2+\frac{x_2^2}{2}\right\}$$

oder

$$(67.)\qquad v = -1+e^{-x_2}e^{\varphi\left\{M\log(1-x_1)-x_2+\frac{x_2^2}{2}\right\}},$$

worin φ eine willkürliche Function bedeutet. Soll nun $(v)_{x_1=0}$ identisch verschwinden, so erhält man zur Bestimmung von φ aus (66.) die Beziehung

$$(68.)\qquad x_2 = \varphi\left(-x_2+\frac{x_2^2}{2}\right)$$

oder, wenn

$$(69.)\qquad -x_2+\frac{x_2^2}{2} = t, \quad \text{also} \quad x_2 = 1+\sqrt{1+2t}$$

gesetzt wird,

$$(70.)\qquad \varphi(t) = 1+\sqrt{1+2t},$$

und es nimmt somit das gesuchte Integral nach (67.) die Form an

$$(71.)\qquad v = -1+e^{-x_2}e^{1+\sqrt{1+2M\log(1-x_1)-2x_2+x_2^2}}$$

oder

$$(72.)\qquad v = -1+e^{-x_2}e^{1+\sqrt{2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2}}.$$

Dieses Integral ist nun in der That in der Umgebung von $x_1=0$, $x_2=0$ nach positiven ganzen Potenzen von x_1 und x_2 entwickelbar, indem

$$(73.)\qquad \begin{cases} v = -1+e^{-(x_2-1)}\Big\{1+(2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2)^{\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad +\frac{1}{2!}(2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2)^{\frac{2}{2}}+\cdots\Big\}, \end{cases}$$

und sich

$$(74.)\qquad (2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2)^{\frac{r}{2}}$$

in der angegebenen Weise darstellen lässt, hat aber, wie es bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen nach dem Satze von ***Fuchs*** sein musste, um $x_1=0$ nicht den Einheitskreis als Convergenzbereich, da der Ausdruck (74.) für $x_2=0$ in $(2M\log(1-x_1)+1)^{\frac{r}{2}}$ übergeht und die Gleichung

$$(75.)\qquad 2M\log(1-x_1) = -1$$

schon durch ein x_1 erfüllt wird, welches kleiner als Eins ist und von dem Werthe M abhängt.

$$(81.)\quad \begin{cases} v = -1+\{1+a_0+a_1(1+\sqrt{2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2}) \\ +a_2(1+\sqrt{2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2})^2+\cdots\}\, e^{-(x_2-1)+\sqrt{2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2}}, \end{cases}$$

und man sieht zunächst, dass wegen der geforderten Eindeutigkeit und Endlichkeit des Integrales innerhalb des Einheitskreises in (81.) nur gerade Potenzen der Grösse

$$\sqrt{2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2}$$

enthalten sein dürfen, und dass ferner die dann nach ganzen Potenzen des Argumentes $2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2$ fortschreitende Reihe in der ganzen unendlichen Ebene eben dieses Argumentes convergent sein muss.

Setzt man somit

$$(82.)\qquad \sqrt{1+2t} = \eta,$$

so muss die Function

$$(83.)\qquad (1+a_0+a_1(1+\eta)+a_2(1+\eta)^2+\cdots)e^{1+\eta}$$

eine gerade in der ganzen η-Ebene convergente Function von η sein; setzen wir somit

$$(84.)\quad (1+a_0+a_1(1+\eta)+a_2(1+\eta)^2+\cdots)e^{1+\eta} = \alpha_0+\alpha_1\eta^2+\alpha_2\eta^4+\alpha_3\eta^6+\cdots,$$

worin die Reihe auf der rechten Seite nur der Bedingung unterworfen ist, in der ganzen unendlichen Ebene convergent zu sein, so folgt vermöge (80.)

$$(85.)\qquad e^{\varphi(t)} = \alpha_0+\alpha_1(1+2t)+\alpha_2(1+2t)^2+\cdots,$$

und es wird somit das gesuchte Integral der Differentialgleichung (63.) die Form annehmen

$$(86.)\quad \begin{cases} v = -1+e^{-x_2}\{\alpha_0+\alpha_1(2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2) \\ \qquad +\alpha_2(2M\log(1-x_1)+(x_2-1)^2)^2+\cdots\}, \end{cases}$$

das in der That für x_1 innerhalb des Einheitskreises und für beliebig grosse endliche x_2 nach positiven ganzen Potenzen von x_1 und x_2 entwickelbar ist.

Damit also die Differentialgleichung* (63.) *unabhängig von dem Werthe der Grösse M ein Integral besitzt, welches für x_1 im Einheitskreise und für beliebig grosse endliche x_2 convergirt, ist nothwendig und hinreichend, dass das Integral durch eine Anfangsbedingung der Form

$$(87.)\qquad (v)_{x_1=0} = -1+e^{-x_2}\{\alpha_0+\alpha_1(x_2-1)^2+\alpha_2(x_2-1)^2+\cdots\}$$

bestimmt ist, worin die nach Potenzen von x_2-1 fortschreitende Reihe in der ganzen x_2-Ebene convergent ist.

Man braucht aber, um ähnliche Untersuchungen anzustellen, nicht von der Normalform (63.) der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auszugehen; wir wollen uns zunächst von der speciellen Functionenform frei machen, unter welcher x_2 in die Coefficienten der Differentialgleichung eintreten soll, und die Frage aufwerfen, wie müssen in der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{M}{1-x_1}\psi_0(x_2)+\frac{M}{1-x_1}\psi_1(x_2)v+\frac{M}{1-x_1}\psi(x_2)\frac{\partial v}{\partial x_2} \tag{88.}$$

die um $x_2 = 0$ convergirenden Potenzreihen $\psi_0(x_2)$, $\psi_1(x_2)$, $\psi(x_2)$, von denen die letztere im Nullpunkte nicht verschwinden soll, beschaffen sein, damit dasjenige Integral der Differentialgleichung (88.), welches für $x_1 = 0$ den Werth

$$(v)_{x_1=0} = \omega(x_2) \tag{89.}$$

annimmt, worin $\omega(x_2)$ eine ebenfalls noch näher zu bestimmende Potenzreihe von x_2 bedeutet, in Bezug auf x_1 als Convergenzbereich den Einheitskreis hat, während der Convergenzbereich von x_2 zu bestimmen sein wird.

Da die Differentialgleichung (88.) das totale System liefert

$$\frac{M dx_1}{1-x_1} = -\frac{dx_2}{\psi(x_2)} = \frac{dv}{\psi_0(x_2)+\psi_1(x_2)v}, \tag{90.}$$

so wird deren allgemeines Integral, wenn φ eine willkürliche Function bedeutet, durch

$$\begin{cases} v = -e^{-\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2} \int_0 e^{\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2} \frac{\psi_0(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2 \\ \qquad + e^{-\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2} \varphi\left(-M\log(1-x_1)+\int_0 \frac{dx_2}{\psi(x_2)}\right) \end{cases} \tag{91.}$$

dargestellt, und es wird vermöge der Bedingung (89.) die Function φ aus der Gleichung zu bestimmen sein

$$\varphi\left(\int_0 \frac{dx_2}{\psi(x_2)}\right) = e^{\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2}\omega(x_2)+\int_0 e^{\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2} \frac{\psi_0(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2. \tag{92.}$$

Setzt man

$$\int_0 \frac{dx_2}{\psi(x_2)} = t, \tag{93.}$$

und sei

$$\psi(x_2) = a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots, \tag{94.}$$

worin a_0 der Voraussetzung gemäss von Null verschieden ist, so wird nach (93.)

$$\frac{1}{a_0}x_2+b_2x_2^2+b_3x_2^3+\cdots = t \tag{95.}$$

und daraus

$$x_2 = a_0t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots \tag{96.}$$

in einem gewissen Bereiche um $t=0$ herum convergent, somit nach (92.)

$$\varphi(t) = A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots, \tag{97.}$$

wobei zunächst der Bereich um $t=0$ so weit zusammenzuziehen ist, dass für die entsprechenden x_2 die drei Functionen $\psi_0(x_2)$, $\psi_1(x_2)$, $\psi(x_2)$ zugleich convergiren, und daher der Gleichung (91.) zufolge

$$\left\{\begin{aligned} v = &-e^{\int\limits_0\frac{\psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2}\int\limits_0 e^{\int\limits_0\frac{\psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2}\frac{\psi_0(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2 \\ &+e^{-\int\limits_0\frac{\psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}dx_2}\Big\{A_0+A_1\Big(-M\log(1-x_1)+\frac{1}{a_0}x_2+b_2x_2^2+\cdots\Big) \\ &\qquad +A_2\Big(-M\log(1-x_1)+\frac{1}{a_0}x_2+b_2x_2^2+\cdots\Big)^2+\cdots\Big\}. \end{aligned}\right. \tag{98.}$$

Soll nun das Integral v für x_1 innerhalb des Einheitskreises, für x_2 innerhalb eines noch festzustellenden Bereiches um den Nullpunkt convergiren, so muss zunächst, da für $x_1=1$, $x_2=0$ das Argument der unendlichen Reihe in v unendlich gross wird, die Reihe (97.) für $\varphi(t)$ in der ganzen unendlichen t-Ebene convergiren oder es werden die Functionen $\psi_0(x_2)$, $\psi_1(x_2)$, $\psi(x_2)$ und $\omega(x_2)$ so beschaffen sein müssen, dass die aus (92.) sich ergebende φ-Function den bezeichneten Charakter besitzt. Zunächst ist klar, dass, wenn $\varphi(t)$ eine in der ganzen unendlichen t-Ebene convergente Reihe sein soll, die Function $\omega(x_2)$ keinen kleineren Convergenzbereich haben darf, als der kleinste der zu den Functionen $\psi_0(x_2)$, $\psi_1(x_2)$, $\frac{1}{\psi(x_2)}$ gehörenden Bereiche, wie aus (92.) unmittelbar hervorgeht, wenn man beachtet, dass die Quadraturen innerhalb eben dieser Grenzen und die Exponentialfunction unbeschränkt convergent ist, und dass dies somit eine nothwendige Bedingung dafür ist, dass das Integral in Bezug auf x_1 im Einheitskreise convergirt. Sind also $\psi_0(x_2)$, $\psi_1(x_2)$, $\psi(x_2)$ in der ganzen unendlichen Ebene convergent und verschwindet die letztere Function nur in der Unendlichkeit, so hat auch $\frac{1}{\psi(x_2)}$ die unendliche Ebene als Convergenzbereich und es wird sie somit auch $\omega(x_2)$ haben müssen, wenn das

Integral der partiellen Differentialgleichung um $x_1 = 0$ im Einheitskreise convergent sein soll, und zwar ist dann, wie aus (98.) zu ersehen, der Convergenzbereich dieses Integrales in Bezug auf x_2 ein beliebig grosser endlicher um den Anfangspunkt gelegter Kreis.

Sind umgekehrt $\psi_0(x_2)$ *und* $\psi_1(x_2)$ *in der ganzen Ebene convergirende Potenzreihen von* x_2 *und ist die das Integral bestimmende Anfangsfunction* $\omega(x_2)$ *so beschaffen, dass sie ebenfalls in der ganzen* x_2*-Ebene convergent ist, so wird offenbar, wenn die Umkehrung von* (93.) x_2 *als eine in der ganzen* t*-Ebene endliche und eindeutige Function von* t *liefert,* $\varphi(t)$ *ebenfalls in der ganzen* t*-Ebene endlich und eindeutig sein;* ist nun $\psi(x_2)$ ebenfalls unbeschränkt convergent, so wird es die Form haben

$$\psi(x_2) = a_0 + a_1 x_2, \tag{99.}$$

in welchem Falle in der That

$$\int_0 \frac{dx_2}{a_0 + a_1 x_2} = \frac{1}{a_1} \log \frac{a_0 + a_1 x_2}{a_0} = t \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{a_0}{a_1}(e^{a_1 t} - 1) \tag{100.}$$

ist, und es würde also die partielle Differentialgleichung die Gestalt annehmen

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{M}{1-x_1}\psi_0(x_2) + \frac{M}{1-x_1}\psi_1(x_2)\, v + \frac{M}{1-x_1}(a_0 + a_1 x_2)\frac{\partial v}{\partial x_2}, \tag{101.}$$

worin $\psi_0(x_2)$ und $\psi_1(x_2)$ beliebige in der ganzen Ebene convergirende Potenzreihen und die den Anfangswerth des Integrales bestimmende Function $\omega(x_2)$ eine im Uebrigen beliebige, nur in der ganzen x_2-Ebene convergirende Reihe sein muss. In der That ist das allgemeine Integral von (101.) in der Form enthalten

$$\left\{\begin{aligned} v = & -e^{-\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{a_0 + a_1 x_2} dx_2} \int_0 e^{\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{a_0 + a_1 x_2} dx_2} \frac{\psi_0(x_2)}{a_0 + a_1 x_2} dx_2 \\ & + e^{-\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{a_0 + a_1 x_2} dx_2} \varphi\Big(-M \log(1 - x_1) + \int_0 \frac{dx_2}{a_0 + a_1 x_2}\Big), \end{aligned}\right. \tag{102.}$$

worin φ durch die Gleichung bestimmt ist

$$\varphi\Big(\int_0 \frac{dx}{a_0 + a_1 x_2}\Big) = e^{\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{a_0 + a_1 x_2} dx_2} \omega(x_2) + \int_0 e^{\int_0 \frac{\psi_1(x_2)}{a_0 + a_1 x_2} dx_2} \frac{\psi_0(x_2)}{a_0 + a_1 x_2} dx_2 \tag{103.}$$

oder vermöge (100.)

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(t) = & \; e^{\int_0 \psi_1\left(\frac{a_0}{a_1} e^{a_1 t} - \frac{a_0}{a_1}\right) dt} \omega\Big(\frac{a_0}{a_1} e^{a_1 t} - \frac{a_0}{a_1}\Big) \\ & + \int_0 e^{\int_0 \psi_1\left(\frac{a_0}{a_1} e^{a_1 t} - \frac{a_0}{a_1}\right) dt} \psi_0\Big(\frac{a_0}{a_1} e^{a_1 t} - \frac{a_0}{a_1}\Big) dt, \end{aligned}\right. \tag{104.}$$

woraus unmittelbar ersichtlich, dass, weil ψ_0, ψ_1, ω als unbeschränkt veränderliche Potenzreihen vorausgesetzt worden, $\varphi(t)$ selbst in der ganzen unendlichen t-Ebene convergiren wird, und daher das gesuchte Integral für x_1 den Einheitskreis, für x_2 die ganze unendliche Ebene zum Convergenzbereiche hat.

Aber es braucht $\psi(x_2)$ nicht in der ganzen unendlichen x_2-Ebene zu convergiren, damit die Umkehrung von (93.) in der ganzen t-Ebene endlich und eindeutig ist, so dass also auch z. B. für $\psi(x_2) = \sqrt{1-x_2}$ oder $\psi(x_2) = \sqrt{1-x_2^2}$, welche Beziehungen nach (93.)

$$(105.)\qquad x_2 = t - \frac{t^2}{4} \quad \text{oder} \quad x_2 = \sin t$$

liefern, die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(106.)\qquad \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{M}{1-x_1}\psi_0(x_2) + \frac{M}{1-x_1}\psi_1(x_2)v + \frac{M}{1-x_1}\sqrt{1-x_2}\,\frac{\partial v}{\partial x_2}$$

oder

$$(107.)\qquad \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{M}{1-x_1}\psi_0(x_2) + \frac{M}{1-x_1}\psi_1(x_2)v + \frac{M}{1-x_1}\sqrt{1-x_2^2}\,\frac{\partial v}{\partial x_2},$$

unter der Voraussetzung, dass $\psi_0(x_2)$ und $\psi_1(x_2)$ in der ganzen x_2-Ebene convergent sind, die Eigenschaft haben, dass diejenigen ihrer Integrale, welche für $x_1 = 0$ in eine Function von x_2 übergehen, die in eine unbeschränkt convergirende Reihe entwickelbar ist, für x_1 den Einheitskreis zum Convergenzbereich haben, während der Convergenzbereich in Bezug auf x_2 durch die Convergenz des Integrales (93.) bestimmt ist, also für die beiden hier gewählten speciellen Fälle wiederum der Einheitskreis ist.

Es braucht endlich kaum hervorgehoben zu werden, dass die Bedingung der in der ganzen t-Ebene endlichen und eindeutigen Umkehrung von (93.) nur eine hinreichende war; denn wählt man z. B. $\psi(x_2) = -\frac{1}{2(1-x_2)}$, so dass sich nach (93.) $x_2 = 1-\sqrt{t+1}$ ergiebt, so ist unmittelbar aus (92.) ersichtlich, dass, wenn $\psi_0(x_2)$, $\psi_1(x_2)$, sowie die das Integral bestimmende Function $\omega(x_2)$ in der ganzen Ebene convergirende, nach positiven ganzen Potenzen von $(1-x_2)^2$ fortschreitende Reihen bedeuten, das in Frage kommende Integral für x_1 innerhalb des Einheitskreises, für x_2 innerhalb der ganzen unendlichen Ebene convergiren wird.

Ueber die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Von Herrn *M. Hamburger*.)

Die singulären Lösungen einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$f(x, y, y') = 0,$$

wenn sie vorhanden sind, genügen bekanntlich der Discriminantengleichung

$$\Delta(x, y) = 0,$$

die durch Elimination von y' aus den beiden Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = 0$$

erhalten wird. Im Allgemeinen wird jedoch keines der Gebilde, welche die Discriminantengleichung enthält, eine Lösung der Differentialgleichung darstellen, also überhaupt keine singuläre Lösung existiren, da zur Existenz einer solchen eine leicht aufstellbare Bedingungsgleichung erfüllt sein muss.

Geht man andererseits nach *Lagrange*, der zuerst den Zusammenhang der singulären mit der allgemeinen Lösung dargelegt hat, von der primitiven Gleichung

$$F(x, y, C) = 0$$

aus, wo C die willkürliche Constante bedeutet, so wird die Discriminantengleichung

$$D(x, y) = 0,$$

die durch Elimination von C aus den beiden Gleichungen

$$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

hervorgeht, *im Allgemeinen* die singulären Lösungen der aus der primitiven Gleichung abgeleiteten Differentialgleichung erster Ordnung darbieten.

Der scheinbare Widerspruch, der hier vorliegt, hat die Herren *Darboux* und *Cayley* *) zu neuer Aufnahme der Untersuchungen, die die Theorie der singulären Lösungen zum Gegenstande haben, veranlasst. Die erlangten Resultate haben wichtige Aufschlüsse über die geometrische Bedeutung der beiden erwähnten Discriminantengleichungen ergeben, so weit sie keine Lösungen der Differentialgleichung liefern. Allein eine befriedigende Erklärung des gedachten Paradoxons können wir in den Auseinandersetzungen beider hervorragenden Mathematiker nicht finden. Denn wenn Herr *Darboux* **) die Frage damit zu lösen glaubt, dass er den Satz, jede Differentialgleichung erster Ordnung habe ein Integral von der Form $F(x, y, C) = 0$, wo F die Eigenschaften einer analytischen Function besitzt, als eine unbegründete Annahme bezeichnet, so lässt sich dies zunächst nicht vereinen mit dem *Cauchy*schen Beweis der Existenz von Integralen einer algebraischen Differentialgleichung mit beliebigen Anfangswerthen. Aber auch die Zulässigkeit der fraglichen Form der Integralgleichung geht, wie wir zeigen werden, aus der Existenz der allgemeinen Integrale partieller Differentialgleichungen hervor, die zuerst von *Cauchy* und in neuerer Zeit von Frau *v. Kowalewsky* und Herrn *Darboux* selbst durch strenge Beweise festgestellt ist.

Herr *Cayley* ***) findet die bezeichnete Schwierigkeit durch den Umstand beseitigt, dass die Integralgleichung gewöhnlich transcendent sei und transcendente Curven im Allgemeinen keine Enveloppe haben, und so wären die Ausnahmen in dem ersten Falle, dass nämlich die Differentialgleichung eine singuläre Lösung habe, auch Ausnahmen in dem anderen, dass eine transcendente Gleichung ein System von Curven mit einer Enveloppe darstelle.

Wie wir indess im Folgenden sehen werden, hat die Existenz von Enveloppen oder singulären Lösungen mit der transcendenten oder alge-

---

*) *Darboux,* Sur les solutions singulières des équations aux derivées ordinaires du premier ordre. Bulletin des sciences mathématiques t. IV, 1873, p. 158—176. Eine Anzeige der Resultate findet sich bereits in den Comptes Rendus 1870.

Cayley, On the Theory of the Singular Solutions of the first order. Messenger of Mathematics. Vol. II, 1873, p. 6—12. Vol. VI, 1877, p. 23—27.

**) Bull. des sc. math. t. IV, p. 167.

***) Messenger of Mathematics vol. VI p. 23, 24. Vgl. auch *Forsyth,* Lehrbuch der Differentialgleichungen, übersetzt von *Maser,* S. 42.

braischen Natur*) der allgemeinen Integralgleichung nichts zu thun. Die Eigenschaft eines Systemes von Curven, Enveloppen zu besitzen, folgt nämlich bereits aus dem Verhalten dieses Systemes in einem beschränkten Gebiete der unabhängigen Variablen, innerhalb dessen gültige Darstellungen dieser Curven existiren.

Wenn man nun, was bei der herkömmlichen Ableitung der Enveloppen aus der primitiven Gleichung nicht geschieht, in analytischer Form genau die Bedingung feststellt, unter welcher ihre Discriminantengleichung $D = 0$ keine eigentliche Lösung der aus der primitiven Gleichung abgeleiteten Differentialgleichung liefert**), so zeigt sich in der That der eigenthümliche Umstand, dass, wenn die Differentialgleichung in allgemeinen Coefficienten angesetzt wird, die Integralgleichung die besondere Beschaffenheit hat, dass das sie repräsentirende Curvensystem keine Enveloppe besitzt. Der Fall der Regel in der Differentialgleichung bedingt also einen Ausnahmefall in der Integralgleichung und umgekehrt: Wenn die Integralgleichung in allgemeinen Coefficienten gegeben wird, so bietet die aus ihr abgeleitete Differentialgleichung den Ausnahmefall, singuläre Integrale zu besitzen.

Die Thatsache übrigens, dass ein und dieselbe Eigenschaft gewisser Gebilde in der einen Darstellung als allgemeiner, in der anderen als be-

*) Dass ein System transcendenter Curven auch eine Enveloppe haben könne, dafür giebt Herr *Cayley* an der angezogenen Stelle selbst ein Beispiel, ein solches System nennt er allerdings deshalb „quasi algebraic". Ebendaselbst findet sich Behauptung und Beweis des Satzes, dass ein System algebraischer Curven *stets* eine Enveloppe habe, also eine Differentialgleichung, die keine singuläre Lösung zulasse, keine algebraische Integralgleichung zur allgemeinen Lösung haben könne. Die Unhaltbarkeit des aufgestellten Satzes zeigt schon das bekannte *Serret*sche Beispiel oder folgendes System algebraischer Curven

$$(x+y+C)^2 = (x-y)^3,$$

welches keine Enveloppe hat. Denn die Discriminantengleichung in Beziehung auf C ist $x-y=0$ und die Differentialgleichung, der die Curvenschaar genügt:

$$4(1+y')^2-9(x-y)(1-y')^2 = 0,$$

wird durch $x-y=0$ nicht befriedigt.

**) In der Dissertation des Herrn *Schmidt* „Ueber die singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung", Giessen 1884, wird ebenfalls der Mangel der gewöhnlichen Ableitung der Enveloppen gerügt, aber nur bemerkt, dass unter gewissen Umständen die Discriminantengleichung $D = 0$ auch particuläre Lösungen liefert, dagegen der Fall, wo sie gar keine Lösung darstellt, wiewohl er bei der Anführung des *Serret*schen Beispiels gestreift wird, nicht aufgeklärt.

sonderer Fall erscheint, steht nicht vereinzelt da. So hat eine Curve in Punktcoordinaten, mit allgemeinen Coefficienten angesetzt, keine Doppelpunkte. Wird dagegen die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten gegeben, so müssen die Coefficienten eine gewisse Bedingung erfüllen, damit keine Doppelpunkte existiren. Das Umgekehrte gilt rücksichtlich der Existenz von Doppeltangenten.

Die Existenz einer Enveloppe hängt in der That lediglich von der Natur der Curvenschaar ab und nicht von ihrer Darstellung. Von der Darstellungsform hängt nur ab, ob die Existenz oder Nichtexistenz einer Enveloppe als der allgemeinere Fall erscheint*).

Zunächst von der Differentialgleichung ausgehend, werden wir uns der Principien bedienen, die der wichtigen Abhandlung des Herrn *Fuchs* „Ueber die Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen"**) zu Grunde liegen. Ihre wesentliche Bedeutung liegt in der Zerlegung der Discriminante $\varDelta$ der Differentialgleichung in ihre linearen Theiler und in der Entwickelung der verschiedenen zusammenhängenden Zweige von y' als algebraischer Function von y, wie sie durch die Differentialgleichung gegeben ist, in Reihen, die nach Potenzen eines solchen Theilers $y-\eta$ fort-

*) Herr *Fine* hat in einer Abhandlung „Singular Solutions of Ordinary Differential Equations" (American Journal of Mathematics vol. XII, 1890, p. 295 ff.) die Frage ebenfalls auf analytischem Wege zu lösen versucht. Das Ergebniss, zu dem er gelangt: „die singuläre Lösung einer Differentialgleichung sei ebenso wenig im eigentlichen Sinne eine Lösung, wie die willkürliche Function χ eine solche der Gleichung $\frac{dy}{dx}\chi = \varphi(x, y)\chi$", ist offenbar dem wirklichen Sachverhalt nicht entsprechend; $\chi = 0$ wäre allerdings keine Lösung, aber auch keine Enveloppe der durch die Differentialgleichung repräsentirten Curvenschaar. Wenn ferner Herr *Fine* behauptet (p. 296), dass in den Punkten auf $\varDelta = 0$ die Entwickelung von y nach Potenzen von x im Allgemeinen divergent wird, so gilt dies doch nur, wenn man sich auf ganze Potenzen beschränkt. Wie aber weiter unten gezeigt wird, giebt es, einzelne dieser Punkte ausgenommen, in allen übrigen Punkten von $\varDelta = 0$ Entwickelungen nach gebrochenen Potenzen, welche die durch diese Punkte gehenden Curvenzweige als Lösungen der Differentialgleichung darstellen.

**) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1884, Bd. 32 p. 699 ff. Wir verweisen noch auf die für das eindringende Verständniss der *Fuchs*schen Arbeit sehr werthvolle Dissertation des Herrn *Wallenberg*: „Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung etc.", Halle 1890, worin insbesondere diejenigen behandelt sind, welche die Ableitung bis zum dritten Grade enthalten. Die ganze Arbeit, von der die Dissertation nur den ersten Theil enthält, ist in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXXV erschienen.

schreiten, und deren Coefficienten, ebenso wie η, von x abhängig sind. Integrirt man die in dieser Form erhaltenen Differentialgleichungen mit der Bestimmung, dass für einen willkürlichen Werth c von x das Integral y mit η übereinstimmt, so erhält man jeder Gruppe von zusammenhängenden Zweigen von y' entsprechend eine Darstellung von $y-\eta$ durch eine Reihe, die nach Potenzen von $x-c$ fortschreitet, falls eine solche überhaupt existirt. Der Exponent der niedrigsten Potenz in diesen Reihen, ob er nämlich in allen nicht grösser oder in einigen grösser als 1 ist und der andererseits eintretende Fall, dass gewisse dieser Darstellungen sich auf $y-\eta \doteq 0$ reduciren, bilden charakteristische Merkmale dafür, dass $y=\eta$ kein Integral oder ein singuläres Integral, also eine Enveloppe einer Schaar entsprechender Integralcurven, oder endlich ein particuläres Integral darstellt, wobei die beiden letzteren Eigenschaften vereinigt sein können.

Den Schluss des ersten Abschnittes bildet der Nachweis, dass jede algebraische Differentialgleichung erster Ordnung und $n$ten Grades in Beziehung auf y' eine Integralgleichung zulässt, welche in der Umgebung eines willkürlichen Werthepaares $x=a$, $y=b$, wobei nur eine Anzahl isolirter Werthepaare ausgeschlossen ist, auf unendlich viele Arten in der Form

$$F(x,\ y,\ C) = 0$$

dargestellt werden kann, worin F eine ganze Function $n$ten Grades in Beziehung auf die willkürliche Constante C und die Coefficienten nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ fortschreitende und einen gewissen Convergenzbereich besitzende Reihen sind.

Im zweiten Abschnitte legen wir eine endliche Gleichung

$$F(x,\ y,\ C) = 0$$

vom Grade n in Bezug auf C und analytischen Functionen von x und y als Coefficienten der Potenzen von C zu Grunde und leiten daraus durch Elimination der Constanten die Differentialgleichung ab, welche im Allgemeinen sich durch einen von y' unabhängigen Factor von der algebraischen Differentialgleichung unterscheiden wird, der die primitive Gleichung der Voraussetzung nach genügen soll. Hierbei zeigt sich, dass die durch Elimination von C aus $F(x, y, C) = 0$ $\frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0$ hervorgehende Discriminantengleichung $D=0$ die abgeleitete Gleichung zwar stets befriedigt, aber darum doch nicht als Integral betrachtet werden kann, falls mit $D=0$ nur der erwähnte von y' freie Factor verschwindet, während der



eigentlichen Differentialgleichung durch $D = 0$ nicht genügt wird. Damit ist die Bedingung festgestellt, wann die durch $F(x, y, C) = 0$ repräsentirte Curvenschaar keine Enveloppe hat. Indem wir hier ebenfalls auf die linearen Theiler $y-\eta$ von D eingehen und die verschiedenen Zweige von C als Functionen von y in Reihen nach Potenzen von $y-\eta$ mit von x abhängenden Coefficienten entwickeln, ergeben sich durch Umkehrung ebenso viele Darstellungen von $y-\eta$ nach Potenzen von $x-c$, wobei C derart particularisirt wird, dass für den willkürlichen Werth c von x, y mit η übereinstimmt. Hinsichtlich dieser Reihen, insofern ihre Form oder Existenz charakteristische Merkmale für die fragliche Beschaffenheit der Curve $y = \eta$ darbieten, finden sich die aus der Betrachtung der Differentialgleichung gewonnenen Ergebnisse bestätigt. Da somit die von der Integralgleichung und der Differentialgleichung ausgehenden Untersuchungen zu übereinstimmendem Ziele führen, verliert die Behauptung einer angeblichen Incongruenz beider Betrachtungsweisen jede Berechtigung.

Den folgenden Entwickelungen schicken wir noch eine allgemeine Bemerkung über die einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügenden Functionen voraus.

Briot und *Bouquet* haben in ihrer berühmten Abhandlung, die zuerst im Journal de l'École Polytechnique cah. 36 erschienen ist, den Satz bewiesen, dass die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

eine Lösung hat, welche für $x = x_0$ den Werth y_0 annimmt und sich in eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitende Reihe $y = \mathfrak{P}(x-x_0)$ entwickeln lässt, falls $f(x, y)$ in der Umgebung von $x = x_0$ $y = y_0$ eine Darstellung durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$ fortschreitende Reihe gestattet. Es wird dann weiter behauptet, dass eine andere Lösung y, die für $x = x_0$ in y_0 übergeht, nicht existirt. Stellt man nämlich das zweite Integral, falls es existirt, in der Form $y+z = \mathfrak{P}(x-x_0)+z$ dar, so dass z für $x = x_0$ verschwindet, dann genügt z der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = f(x,\ \mathfrak{P}(x-x_0)+z)-f(x,\ \mathfrak{P}(x-x_0)) = z^m \varphi(x,\ z),$$

wo m eine von Null verschiedene positive ganze Zahl ist und φ in eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, z fortschreitende Reihe entwickelbar ist.

Aus der Form dieser Gleichung schliessen *Briot* und *Bouquet,* dass ihr ausser $z=0$ keine Function z genügen könne, die für $x=x_0$ verschwindet. Dieser Schluss ist, wie Herr *Fuchs* in seiner Abhandlung „Ueber die Werthe, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können" gezeigt hat, nicht ohne Weiteres richtig. Es existiren vielmehr im Allgemeinen unendlich viele solche Integrale, die dadurch charakterisirt sind, dass für x, als Function von z betrachtet, $z=0$ ein Punkt der Unbestimmtheit ist. Stellt man indess die Forderung, dass das Integral z nach Potenzen von $x-x_0$ entwickelbar sei, dann ist in der That $z=0$ die einzige obiger Differentialgleichung genügende Function, die für $x=x_0$ verschwindet. Denn zunächst könnte in einer solchen Entwickelung von z weder eine negative noch eine gebrochene Potenz von $x-x_0$ vorkommen, da im ersten Falle z selbst, im zweiten eine endliche Ableitung von z für $x=x_0$ unendlich werden müsste; aus vorstehender Differentialgleichung folgt aber durch fortgesetzte Differentiation, dass für $x=x_0$ mit z auch sämmtliche Ableitungen von z verschwinden müssen. Setzt man aber für z eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitende Reihe, so folgt aus der eben gemachten Bemerkung, dass sämmtliche Coefficienten in dieser Reihe verschwinden.

Somit bleibt der *Briot-Bouquet*sche Satz mit der Modification bestehen, dass der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y),$$

worin $f(x,\ y)$ in der Umgebung von $x=x_0$ $y=y_0$ in einer nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$ fortschreitenden Reihe darstellbar ist, nur ein einziges nach Potenzen von $x-x_0$ entwickelbares particuläres Integral y genügt, das für $x=x_0$ den Werth y_0 annimmt, und zwar ein solches, das nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitet.

I.

Es sei

$$(1.)\qquad f(x,\ y,\ y') \equiv A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

die vorgelegte Differentialgleichung vom $n$ten Grade in y', deren Coefficienten A_0, A_1, ... ganze rationale Functionen von x und y ohne gemeinsamen Theiler sind. Die Gleichung ist in Beziehung auf y' als irreductibel vor-

ausgesetzt. Durch Elimination von y' aus den Gleichungen

$$f(x,\ y,\ y') = 0,\quad \frac{\partial f(x,\ y,\ y')}{\partial y'} = 0$$

gehe die Discriminantengleichung

$$\Delta = 0$$

hervor, welche die Bedingung liefert, dass mehrere Wurzeln y' der Gleichung (1.) einander gleich werden.

Es sei nun $y = \eta$ eine Wurzel der Gleichung $\Delta = 0$ und η zunächst eine solche Function von x, dass A_0 nicht identisch verschwindet, wenn y durch η ersetzt wird, so werden durch die Gleichung

$$(2.)\qquad f(x,\ \eta,\ y') = 0$$

innerhalb des Convergenzbezirkes von η in der x-Ebene um einen Punkt $x = a$, in dessen Umgebung η durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe darstellbar ist, n wohlbestimmte Functionen y' definirt, von denen keine identisch, d. h. für jeden Werth von x, unendlich wird, einige aber mit einander zusammenfallen werden. Es mögen nun p Wurzeln der Gleichung (2.) in y' gleich ζ werden, wo ζ eine Function von x bedeutet, so giebt es p Functionen y', die der Gleichung (1.), als algebraische Gleichung zwischen y und y' mit von x abhängenden Coefficienten angesehen, genügen und für $y = \eta$ in den gemeinsamen von x abhängenden Werth ζ übergehen. Diese Functionen y' werden im Allgemeinen in Gruppen von zusammenhängenden Zweigen zerfallen, und eine solche Gruppe von $\alpha(\leqq p)$ Zweigen wird die Darstellung haben*)

$$y'-\zeta = g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\cdots,$$

worin $\varkappa$ wie α eine von Null verschiedene positive ganze Zahl bedeutet, und g_0, g_1, ... nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen sind, von denen noch vorausgesetzt wird, dass g_0 nicht identisch verschwindet.

Die vorstehende Gleichung schreiben wir

$$\frac{d(y-\eta)}{dx} = \zeta-\frac{d\eta}{dx}+g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\cdots.$$

Wir nehmen nun zuerst den Fall, dass $y = \eta$ kein Integral der vorgelegten

*) Für das Folgende s. *Fuchs*, Berl. Ber. 1884. XXXII S. 701—703.

Differentialgleichung sei; dann ist nicht identisch $\zeta = \frac{d\eta}{dx}$. Setzt man

$$y = \eta + u^{\alpha},$$

so folgt

$$\alpha u^{\alpha-1}\frac{du}{dx} = \zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_0 u^{\varkappa} + g_1 u^{\varkappa+1} + \cdots,$$

$$(4.)\qquad \frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{\zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_0 u^{\varkappa} + g_1 u^{\varkappa+1} + \cdots}.$$

In dem betrachteten Bezirk der x-Ebene kann nun ein Punkt $x = c$ beliebig so gewählt werden, dass für ihn $\zeta - \frac{d\eta}{dx}$ nicht verschwindet. Die rechte Seite der Gleichung (4.) stellt also eine Function von x und u dar, welche in der Umgebung des Werthepaares $x = c$, $u = 0$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - c$ und u entwickelt werden kann. Die der vorstehenden Differentialgleichung genügende Function x von u, die für $u = 0$ den Werth c annimmt, lässt sich daher in der Form darstellen

$$x - c = \frac{1}{\left(\zeta - \frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}} u^{\alpha} + b u^{\alpha+\varkappa} + b_1 u^{\alpha+\varkappa+1} + \cdots.$$

Durch Umkehrung dieser Reihe erhält man

$$u = (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{\left(\zeta - \frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}}\,(x-c)^{\frac{1}{\alpha}} + \beta_2 (x-c)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots$$

und durch Erhebung in die αte Potenz

$$(\text{I.})\quad y - \eta = \left(\zeta - \frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}(x-c) + \gamma_1 (x-c)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \gamma_2 (x-c)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \cdots.$$

Diese Gleichung stellt eine Gruppe von α im Verzweigungspunkte $x = c$ zusammenhängenden Zweigen der Integralfunction y dar, die den Werth $\eta(c)$, und deren erste Ableitungen den Werth $\zeta(c)$ im Punkte $x = c$ gemeinsam haben. Da hier für $x = c$ $\frac{d\eta}{dx}$ von ζ verschieden ist, so berühren die Zweige einander in $x = c$, ohne die Curve $y = \eta$ zu berühren. Lässt man den willkürlichen Parameter c sich stetig ändern in einem Gebiete der x-Ebene, worin η und ζ eindeutig und stetig bleiben, so erhält man in (I.) eine α-fach unendliche Schaar von sich berührenden Zweigen particulärer Integralcurven, die von der Curve $y = \eta$ in den Berührungspunkten geschnitten, aber nicht berührt werden.

Wir haben bisher angenommen, dass A_0 nicht identisch verschwindet, wenn y durch η ersetzt wird. Wird jedoch $A=0$ für $y=\eta$, so werden eine Anzahl Wurzeln y' der Gleichung (1.), etwa p, unabhängig von x, unendlich. Unter den p der Gleichung (1.) genügenden Functionen y', die alsdann für $y=\eta$ unendlich werden, gebe es wieder eine Gruppe von α in $y=\eta$ zusammenhängenden Zweigen, so lassen sich dieselben in der Form

$$y' = (y-\eta)^{-\frac{\varkappa}{\alpha}}\{g_0+g_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}+g_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}}+\cdots\}$$

darstellen, worin $\varkappa$ so wie α eine von Null verschiedene positive ganze Zahl ist und $g_0, g_1, \dots$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen bedeuten, wenn unter a wie oben ein willkürlicher Werth verstanden wird, in dessen Umgebung η eindeutig und stetig verläuft. Von g_0 wird vorausgesetzt, dass es nicht identisch verschwindet. Aus der vorstehenden Gleichung erhält man nach Einführung der Substitution

$$y = \eta+u^{\alpha},$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\varkappa+\alpha-1}}{g_0-u^{\varkappa}\frac{d\eta}{dx}+g_1u+g_2u^2+g_3u^3+\cdots}.$$

Wählt man nun in dem betrachteten Bereich der x-Ebene einen beliebigen Punkt $x=c$, für den g_0 nicht verschwindet, so kann die rechte Seite obiger Gleichung in einer nach ganzen positiven Potenzen von $x-c$ und u fortschreitenden, in der Umgebung von $x=c$, $u=0$ convergirenden Reihe dargestellt werden. Es giebt daher eine dieser Differentialgleichung genügende Function x von u, die in einer nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreitenden Reihe dargestellt werden kann und für $u=0$ den Werth c annimmt, nämlich

$$x-c = \frac{\alpha}{(\alpha+\varkappa)g_0}u^{\alpha+\varkappa}+\beta_1u^{\alpha+\varkappa+1}+\cdots.$$

Durch Umkehrung erhält man

$$u=(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=\sqrt[\alpha+\varkappa]{\frac{(\alpha+\varkappa)g_0}{\alpha}}(x-c)^{\frac{1}{\alpha+\varkappa}}+\gamma_1(x-c)^{\frac{2}{\alpha+\varkappa}}+\cdots$$

und durch Erhebung in die αte Potenz

$$\text{(II.)}\qquad y-\eta = \sqrt[\alpha+\varkappa]{\left(\frac{(\alpha+\varkappa)g_0}{\alpha}\right)^{\alpha}}(x-c)^{\frac{\alpha}{\alpha+\varkappa}}+\delta_1(x-c)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\varkappa}}+\cdots,$$

eine Gleichung, welche $\alpha+\varkappa$ Zweige einer Integralfunction y darstellt, die

in $x = c$ ihren Verzweigungspunkt haben, in diesem Punkte den Werth $\eta(c)$ annehmen, und deren erste Ableitungen in $x = c$ alle unendlich werden, also auch hier von dem (endlichen) Werthe $\left|\frac{d\eta}{dx}\right|_{x=c}$ verschieden sind. Die Zweige berühren also einander in $x = c$, ohne die Curve $y = \eta$ zu berühren. Lässt man c sich stetig ändern, so erhält man eine $(\alpha+\varkappa)$-fach unendliche Schaar von sich berührenden Zweigcurven, die in den Berührungspunkten von der Curve $y = \eta$ geschnitten, aber ebenfalls nicht berührt werden.

Die Entwickelungsformen (I.) und (II.), sind die einzigen, welche statthaben, falls $y = \eta$ *kein* Integral der vorgelegten Differentialgleichung (1.) ist; sie haben das charakteristische Merkmal gemeinsam, dass der *Exponent der niedrigsten darin auftretenden Potenz von $x-c$ nicht grösser als Eins ist.*

Es kann vorkommen, dass, wenn man in der Differentialgleichung (1.) $y = \frac{1}{z}$ setzt, die Discriminantengleichung der transformirten Differentialgleichung in Bezug auf z' eine Wurzel $z = 0$ hat. Wir sagen dann, $y = \infty$ sei eine Wurzel von $\Delta = 0$. Ist nun $y = \infty$ nicht zugleich ein Integral der Differentialgleichung (d. h. $z = 0$ nicht ein Integral der transformirten), so gelten wieder, wie man sofort durch die Substitution $y = \frac{1}{z}$ erkennt, die Entwickelungsformen (I.) oder (II.), wenn nur in ihnen $y-\eta$ durch $\frac{1}{y}$ ersetzt wird.

Endlich kann Δ einen von y unabhängigen Factor haben: ein linearer Theiler desselben sei $x = a$, dann ist in der Differentialgleichung x als Function von y zu betrachten; ist nun $x = a$ nicht zugleich ein Integral, so erhält man die Darstellungsformen von $x-a$ nach Potenzen von $y-c$, wenn man in (I.) oder (II.) x mit y vertauscht und η durch a ersetzt. Wenn $x = \infty$ eine Wurzel von $\Delta = 0$ ist, ohne ein Integral zu sein, dann ist in den genannten Entwickelungsformen $y-\eta$ durch $\frac{1}{x}$ und x durch y zu ersetzen.

Wir gehen nun zur Betrachtung des Falles über, dass $y = \eta$, wo η eine endliche Wurzel von $\Delta = 0$ ist, ein Integral der Differentialgleichung (1.) sein soll. Eine der Wurzeln y' der Gleichung

$$f(x, \eta, y') = 0$$

wird dann gleich $\frac{d\eta}{dx}$ sein. Unter den Functionen y', die der Gleichung (1.) genügen und für $y = \eta$ den Werth $\frac{d\eta}{dx}$ annehmen, möge eine Gruppe von α im Punkte $y = \eta$ zusammenhängenden Zweigen existiren, so wird diese die Darstellungsform (3.) zulassen, in der ζ durch $\frac{d\eta}{dx}$ zu ersetzen ist. Man hat demnach

$$(5.)\qquad \frac{d(y-\eta)}{dx} = g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\cdots,$$

worin über $g_0, g_1, \dots$ das Frühere gilt und insbesondere, dass g_0 nicht identisch verschwindet. Die Substitution

$$y = \eta+u^\alpha$$

ergiebt

$$\alpha u^{\alpha-1}\frac{du}{dx} = g_0u^\varkappa+g_1u^{\varkappa+1}+\cdots$$

und hieraus

$$(6.)\qquad \frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-1-\varkappa}}{g_0+g_1u+g_2u^2+\cdots}.$$

Hier sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

$$\alpha-1-\varkappa \geqq 0 \quad \text{und} \quad \alpha-1-\varkappa < 0$$

1) $\alpha-1-\varkappa \geqq 0$, also, da $\varkappa > 0$ ist, $0 < \varkappa \leqq \alpha-1$, oder $0 < \varkappa < \alpha$. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $\alpha > 1$ ist.

Wird wieder ein willkürlicher Werth c in dem Eindeutigkeitsgebiete der x-Ebene für die Functionen $g_0, g_1, \dots$ so gewählt, dass g_0 für $x = c$ nicht verschwindet, so lässt sich die rechte Seite von (6.) in eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-c$ und u fortschreitende Reihe entwickeln, und der Differentialgleichung (6.) genügt daher eine Function x von u, die für $u = 0$ den Werth c annimmt und folgende Darstellung hat:

$$x-c = \left|\frac{\alpha}{(\alpha-\varkappa)g_0}\right|_{x=c} u^{\alpha-\varkappa}+\beta_1u^{\alpha-\varkappa+1}+\cdots.$$

Durch Umkehrung ergiebt sich

$$u = (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha-\varkappa]{\left|\frac{(\alpha-\varkappa)g_0}{\alpha}\right|_{x=c}}\,(x-c)^{\frac{1}{\alpha-\varkappa}}+\gamma_2(x-c)^{\frac{2}{\alpha-\varkappa}}+\cdots$$

und durch Erhebung in die αte Potenz

$$(\text{III.})\qquad y-\eta = \sqrt[\alpha-\varkappa]{\left(\left|\frac{(\alpha-\varkappa)g_0}{\alpha}\right|_{x=c}\right)^\alpha}\,(x-c)^{\frac{\alpha}{\alpha-\varkappa}}+\delta(x-c)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\varkappa}}+\cdots.$$

Charakteristisch in der Entwickelungsform (III.), die nur in dem Falle vorkommen kann, dass $y=\eta$ ein Integral der Differentialgleichung (1.) darstellt, ist, dass ***der Exponent der niedrigsten Potenz von $x-c$ stets grösser als 1 ist.*** Die Gleichung (III.) stellt eine Gruppe von $\alpha-\varkappa$ (in dem hier betrachteten Falle $\geqq 1$) im Verzweigungspunkte $x=c$ zusammenhängenden Zweigen einer Integralfunction y dar von der Eigenschaft, dass im Punkte $x=c$ für alle Zweige:

$$y=\eta,\quad y'=\eta',\quad y^{(\lambda)}=\eta^{(\lambda)},$$

wo λ, falls $\alpha-\varkappa>1$, die grösste in $\frac{\alpha}{\alpha-\varkappa}$ enthaltene ganze Zahl und, wenn $\alpha-\varkappa=1$, den Werth $\alpha-1$ bedeutet, so dass, da, wie oben bemerkt, α hier >1 ist, λ stets mindestens gleich 1 ist. Die Zweige haben also unter einander und mit der Curve $y=\eta$ im Punkte c eine Berührung λter Ordnung. Lässt man c eine stetige Aenderung erfahren, so erhält man eine $(\alpha-\varkappa)$-fach unendliche Schaar von sich berührenden Zweigen, die in den Berührungspunkten von der Curve $y=\eta$ getroffen und dort berührt werden. $y=\eta$ ist also eine Enveloppe dieser Schaar, oder ein singuläres Integral. Ist $\varkappa=\alpha-1$, so reducirt sich die Anzahl der Zweige, die im Punkte c von der Curve $y=\eta$ berührt werden, auf 1. In diesem Falle bildet also der bewegliche Punkt c für die Integrale, die aus der in (5.) dargestellten Gruppe von α zusammenhängenden Zweigen von y' als Function von y hervorgehen, keinen Verzweigungspunkt*).

Ist $y=\infty$ eine Wurzel von $\varDelta=0$ und zugleich ein Integral der Differentialgleichung, so hat man $y=\frac{1}{z}$ zu setzen und die Entwickelung von der Form (5.) anzusetzen, worin z' für y' und z für $y-\eta$ zu substituiren ist. Ergiebt sich dann $\varkappa<\alpha$, so erhält man für $z=\frac{1}{y}$ eine Darstellung von der Form (III.), und $y=\infty$ stellt eine Enveloppe dar.

Ist endlich $x-a$ ein Theiler von $\varDelta$ und $x=a$ ein Integral, so ist x mit y zu vertauschen und die entsprechende Untersuchung anzustellen. Dasselbe gilt, wenn $x=a$ ein Integral ist, ohne ein Theiler von $\varDelta$ zu sein, und zugleich zwei Wurzeln y' für $x=a$ unendlich werden.

---

*) Vgl. *Fuchs,* Berliner Sitzungsber. 1884. XXXII S. 705, wo das Eintreten dieses Falles oder des im Folgenden betrachteten $\varkappa>\alpha-1$ als nothwendige Bedingung dafür auftritt, dass die Integrale der Differentialgleichung keine beweglichen Verzweigungspunkte haben.

2) $\alpha-1-\varkappa<0$, also $\varkappa>\alpha-1$ oder $\varkappa\geqq\alpha$.

Die Substitution $y=\eta+u^\alpha$ ergiebt dann aus (5.)

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\alpha}u^{\varkappa-(\alpha-1)}\{g_0+g_1u+g_2u^2+\cdots\},$$

wo jetzt $\varkappa-(\alpha-1)$ eine von Null verschiedene positive ganze Zahl ist. Nach der Bemerkung am Schlusse der Einleitung genügt der vorstehenden Differentialgleichung ausser $u=0$ kein nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x-c$ entwickelbares Integral, das für den willkürlichen Werth $x=c$ den Werth Null hat. Folglich genügt auch der Differentialgleichung (5.) kein nach Potenzen von $x-c$ entwickelbares Integral y_λ das mit η für den willkürlichen Werth $x=c$ übereinstimmt, ausser $y=\eta$ selbst. Dies ist eine Anzeige dafür, dass $y=\eta$ ein particuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist; ausserdem kann diese Curve eine Enveloppe für eine Schaar von Integralen sein, die aus einer anderen Gruppe von Functionen y' hervorgeht, und in deren Darstellung von der Form (5.) $\varkappa\leqq\alpha-1$ ist.

Die Modificationen, die für $y=\infty$ oder $x=a$ als Wurzeln von $\Delta=0$ einzutreten haben, sind dieselben wie im vorigen Falle.

Die vorstehenden Ergebnisse fassen wir, wie folgt, zusammen.

Ist $y=\eta$ eine endliche Wurzel der Discriminantengleichung $\Delta=0$, so sind drei Fälle möglich:

1) $y=\eta$ ist kein Integral der Differentialgleichung; dann lassen alle particulären Integrale y, die in einem willkürlichen Punkte $x=c$ der x-Ebene, bei welchem η eindeutig und stetig bleibt, mit η übereinstimmen, eine Darstellung von der Form

$$y-\eta=\mathfrak{P}(x-c)$$

zu, wo $\mathfrak{P}$ eine nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x-c$ fortschreitende Reihe bedeutet. In allen diesen Reihen ist der Exponent der niedrigsten Potenz von $x-c$ nicht grösser als 1.

2) $y=\eta$ ist ein singuläres Integral, d. h. eine Enveloppe einer Schaar particulärer Integralcurven; dann giebt es eine oder mehrere Gruppen von in $x=c$ mit η übereinstimmenden und dort, falls die Gruppe nicht aus einem unverzweigten Integrale besteht, sich verzweigenden particulären Integralen y, die eine Darstellung obiger Form zulassen und in denen der Exponent der niedrigsten Potenz von $x-c$ grösser als 1 ist.

3) $y=\eta$ ist nur ein particuläres Integral oder zugleich auch ein singuläres, dann reduciren sich jedenfalls einige Darstellungen particulärer

Integrale y, die mit η in $x = c$ übereinstimmen, auf $y - \eta = 0$, und in dem ersten Falle ist in den anderen Darstellungen überall der Exponent der niedrigsten Potenz von $x - c$ nicht grösser als 1, im anderen Falle giebt es ausserdem particuläre in $x = c$ mit η übereinstimmende Integrale, in denen der erwähnte Exponent grösser als 1 ist.

Für die eintretenden Modificationen, falls $\varDelta = 0$ eine unendliche oder von y unabhängige Wurzel $x = a$ hat, verweisen wir auf die früheren Angaben.

Die Natur des Integrales $y = \eta$ kann man übrigens unmittelbar an der Entwickelungsform (5.) für y' erkennen, die stets gilt, wenn $y = \eta$ ein Integral der Differentialgleichung ist:

$$\frac{d(y-\eta)}{dx} = g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wo $\varkappa$ und α positive ganze von Null verschiedene Zahlen bedeuten.

η ist ein singuläres Integral, wenn $\varkappa < \alpha$, ein particuläres, wenn $\varkappa \geqq \alpha$ ist, und beides zugleich, wenn Entwickelungen von der einen und anderen Beschaffenheit existiren.

Man erkennt hierin die Bestätigung des *Laplace*schen Kriteriums für singuläre Integrale, soweit es Integrale algebraischer Differentialgleichungen betrifft. Denn in der That wird nur, wenn $\varkappa < \alpha$, $\frac{\partial y'}{\partial y} = \infty$ für $y = \eta$. Nur ist hier zu berücksichtigen, dass y' als eine mehrdeutige Function von y gleichzeitig solche Zweige haben kann, für welche $\frac{\partial y'}{\partial y} = \infty$, und andere, für welche dieser Ausdruck endlich ist für $y = \eta$, und so ein und dasselbe Integral $y = \eta$ zugleich singulär und particulär sein kann. Vorausgesetzt ist natürlich noch, dass $y = \eta$ überhaupt ein Integral ist, wozu nothwendig und hinreichend ist, dass eine der Wurzeln y' der Gleichung

$$f(x, \eta, y') = 0$$

mit $\frac{d\eta}{dx}$ übereinstimmt.

Wir bemerken noch Folgendes. Man kann die Discriminante $\varDelta$ auf die Form

$$\varDelta = P^{\lambda} Q^{\mu} R^{\nu} \ldots$$

bringen, wo $P, Q, R, \ldots$ von einander verschiedene irreductible Polynome in x und y bezeichnen.

Es lässt sich nun zeigen, dass, wenn η eine Wurzel der Gleichung $P=0$ ist, die vom $m$ten Grade sei, und zugleich $y=\eta$ ein Integral der Differentialgleichung ist, auch $y=\eta_1$ ein solches ist, wenn η_1 eine andere Wurzel von $P=0$ bedeutet. Denn der Voraussetzung nach ist identisch

$$f\left(x,\ \eta,\ \frac{d\eta}{dx}\right) = 0.$$

Indem man aber $\frac{d\eta}{dx}$ und die höheren als $(m-1)$-ten Potenzen von η vermöge $P=0$ auf die Form $a_0+a_1\eta+\cdots+a_{m-1}\eta^{m-1}$ reducirt, geht diese Gleichung nach Fortschaffung des gemeinschaftlichen Nenners in

$$p_0+p_1\eta+\cdots+p_{m-1}\eta^{m-1} = 0$$

über, worin $p_0, \ldots, p_{m-1}$ ganze rationale Functionen von x bezeichnen. Wegen der Irreductibilität der Gleichung $P=0$ müssen diese Coefficienten identisch verschwinden, folglich besteht die Gleichung

$$f\left(x,\ \eta,\ \frac{d\eta}{dx}\right) = 0$$

für jede Wurzel der Gleichung $P=0$. Aber auch die nähere Beschaffenheit einer Wurzel η, eine Enveloppe oder ein particuläres Integral zu sein, ist bei allen Wurzeln derselben Gleichung die gleiche. Diese hängt nämlich, wie bemerkt, von der Form der Reihenentwickelung (5.) für $\frac{d(y-\eta)}{dx}$ nach Potenzen von $y-\eta$ ab, die wir, indem wir $y=\eta+v$ setzen, schreiben

$$(7.)\qquad \frac{dv}{dx} = g_0 v^{\frac{x}{a}}+g_1 v^{\frac{x+1}{a}}+\cdots.$$

Da nun, wenn y ein Integral bedeutet,

$$f\left(x,\ \eta,\ \frac{d\eta}{dx}\right)=0,\quad f\left(x,\ \eta+v,\ \frac{d\eta}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)=0$$

zugleich bestehen, so erhält man, wenn man die zweite Gleichung nach Potenzen von v und $\frac{dv}{dx}$ ordnet und $\frac{d\eta}{dx}$ durch η ausdrückt, nach Fortschaffung des gemeinsamen Nenners

$$(8.)\qquad 0 = h_{10}v+h_{01}\frac{dv}{dx}+h_{20}v^2+h_{11}v\frac{dv}{dx}+h_{02}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\cdots,$$

wo die rechte Seite ein Polynom in v und $\frac{dv}{dx}$ ist und die Coefficienten $h_{10}, h_{01}, \ldots$ ganze rationale Functionen von x und η bezeichnen. Entwickelt

man nun $\frac{dv}{dx}$ als durch die vorstehende Gleichung definirte algebraische Function von v in Reihen nach Potenzen von v, so hängt die Gestalt dieser Entwickelung von gewissen Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten ab, welche wegen der Irreductibilität von $P = 0$ bestehen bleiben, wenn eine Wurzel η durch eine andere Wurzel derselben Gleichung $P = 0$ ersetzt wird. Es können ferner durch diese Vertauschung keine neuen Bedingungsgleichungen hinzutreten, welche die Gestalt der Entwickelung verändern könnten, weil jede solche für η_1 geltende auch wiederum für η gelten müsste. Die Entwickelung (7.) bleibt also bestehen, wenn in den Coefficienten g_0, g_1, ..., die von x und η abhängen, η mit η_1 vertauscht wird. Nur ist dann $y-\eta_1$ für v zu setzen. Es besteht also auch

$$\frac{d(y-\eta_1)}{dx} = g_0(x, \eta_1)(y-\eta_1)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1(x, \eta_1)(y-\eta_1)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \cdots.$$

Ist nun $\varkappa < \alpha$, so ist η_1 ebenso wie η eine Enveloppe für eine α-fach unendliche Schaar von Integralen y, nur dass diese jetzt aus solchen particulären Integralen y bestehen, die mit η_1 in $x = c$ übereinstimmende Werthe annehmen. Ebenso ist, wenn $\varkappa \geqq \alpha$, η_1 wie η ein particuläres Integral.

Es genügt also, je eine Wurzel jeder der irreductiblen Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \ldots,$$

in welche die Discriminantengleichung $\Delta = 0$ zerfällt, nach dem obigen Verfahren zu untersuchen, um den besonderen Charakter der Curven

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \ldots,$$

ob sie Integralcurven sind, und eventuell ob sie Enveloppen oder particuläre Curven der Schaar sind, zu erkennen.

Zum Schluss leiten wir noch aus der vorgelegten Differentialgleichung (1.) die allgemeine Integralgleichung mit einer willkürlichen Constanten ab.

Die Differentialgleichung (1.) werde durch

$$\varphi(x, y) = C$$

befriedigt, wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Es muss dann die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' = 0$$

identisch erfüllt werden, wenn für y' eine Wurzel der Gleichung (1.) gesetzt wird. Ist $x = a$, $y = b$ ein Werthepaar, für welches weder $\Delta = 0$,



noch y' unbestimmt wird, so hat die Gleichung $f(a, b, y') = 0$ n von einander verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, und wenn $\alpha_\varkappa$ von Null verschieden ist, so kann die Function $\frac{1}{y'}$, die für $x = a$, $y = b$ in $\frac{1}{\alpha_\varkappa}$ übergeht, in eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ fortschreitende Reihe entwickelt werden:

$$\frac{1}{y'} = g_0^\varkappa + g_1^\varkappa(y-b) + g_2^\varkappa\frac{(y-b)^2}{1.2} + \cdots,$$

worin $g_0^\varkappa$, $g_1^\varkappa$, ... Reihen bedeuten, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreiten, und $g_0^\varkappa$ für $x = a$ den Werth $\frac{1}{\alpha_\varkappa}$ annimmt. Man erhält somit die partielle Differentialgleichung für φ:

$$(10.)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(g_0^\varkappa + g_1^\varkappa(y-b) + g_2^\varkappa\frac{(y-b)^2}{1.2} + \cdots\right).$$

Dieser kann, wie Frau *von Kowalewsky* nachgewiesen hat, durch eine einen gewissen Grenzbezirk besitzende Reihe von der Form

$$(11.)\qquad \varphi = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi^\nu(x)\frac{(y-b)^\nu}{\nu!}$$

genügt werden, wo $\varphi^0(x)$, $\varphi^1(x)$, ... nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen bedeuten, von denen φ^0 willkürlich angenommen werden kann und die übrigen sich durch die identische Gleichung bestimmen, welche die Substitution des Ausdruckes (11.) in (10.) ergiebt:

$$\varphi^1 + \varphi^2(y-b) + \varphi^3\frac{(y-b)^2}{1.2} + \varphi^4\frac{(y-b)^3}{1.2.3} + \cdots$$
$$= -\left(\frac{d\varphi^0}{dx} + \frac{d\varphi^1}{dx}(y-b) + \frac{d\varphi^2}{dx}\frac{(y-b)^2}{1.2} + \cdots\right)\left(g_0^\varkappa + g_1^\varkappa(y-b) + g_2^\varkappa\frac{(y-b)^2}{1.2} + \cdots\right).$$

Aus vorstehender Identität folgen die recurrenten Gleichungen

$$\varphi^1 = -g_0^\varkappa\frac{d\varphi^0}{dx},$$
$$\varphi^2 = -\left(g_0^\varkappa\frac{d\varphi^1}{dx} + g_1^\varkappa\frac{d\varphi^0}{dx}\right),$$
$$\varphi^3 = -\left(g_0^\varkappa\frac{d\varphi^2}{dx} + 2g_1^\varkappa\frac{d\varphi^1}{dx} + g_2^\varkappa\frac{d\varphi^0}{dx}\right),$$
$$\varphi^4 = -\left(g_0^\varkappa\frac{d\varphi^3}{dx} + 3g_1^\varkappa\frac{d\varphi^2}{dx} + 3g_2^\varkappa\frac{d\varphi^1}{dx} + g_3^\varkappa\frac{d\varphi^0}{dx}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

durch welche die Reihen φ^1, φ^2, ... eindeutig bestimmt werden.

Aus der Homogeneität der partiellen Differentialgleichung (10.) erhellt übrigens, dass, wenn eine Lösung φ durch die Fixirung der willkürlichen Function φ^0 (am einfachsten $\varphi^0 = x$) festgesetzt ist, jede andere durch $w(\varphi)$ dargestellt werden kann, wo w eine willkürliche Function bezeichnet. Die Integralgleichung wird dadurch nicht geändert, da $\varphi(x, y) = C$ nur in $\varphi(x, y) = C'$ übergeht, daher kann man unbeschadet der Allgemeinheit $\varphi^0 = x$ setzen.

Ist eine und zwar eine einfache Wurzel y' der Gleichung $f(a, b, y') = 0$ gleich Null, dann kann die Function y', die für $x = a$, $y = b$ den Werth Null annimmt, dargestellt werden durch

$$y' = h_0 + h_1(x-a) + h_2 \frac{(x-a)^2}{1.2} + \cdots,$$

wo h_0, h_1, ... nach ganzen positiven Potenzen von $y-b$ fortschreitende Reihen sind und h_0 für $y = b$ verschwindet. Man erhält daher für φ die partielle Differentialgleichung

$$(12.)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(h_0 + h_1(x-a) + h_2 \frac{(x-a)^2}{1.2} + \cdots\right),$$

welcher genügt wird durch die in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ convergente Reihe

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \psi^\nu \frac{(x-a)^\nu}{\nu!},$$

worin ψ^0, ψ^1, ... nach ganzen positiven Potenzen von $y-b$ fortschreitende Reihen bedeuten, ψ^0 willkürlich angenommen werden kann (und zwar unbeschadet der Allgemeinheit $\psi^0 = y$) und ψ^1, ψ^2, ... durch die Recursionsformeln bestimmt werden:

$$\psi^1 = -h_0 \frac{d\psi^0}{dy}; \quad \psi^2 = -\left(h_0 \frac{d\psi^1}{dy} + h_1 \frac{d\psi^0}{dy}\right);$$

$$\psi^3 = -\left(h_0 \frac{d\psi^2}{dy} + 2h_1 \frac{d\psi^1}{dy} + h_2 \frac{d\psi^0}{dy}\right); \quad \ldots.$$

Ist also $x = a$, $y = b$ ein Werthepaar, für welches die Gleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

n bestimmte von einander verschiedene Wurzeln y' hat, von denen eine auch unendlich sein kann, dann giebt es n von einander verschiedene Lösungen der Differentialgleichung (1.) von der Form

$$\varphi_1(x, y) = C, \quad \varphi_2(x, y) = C, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, y) = C,$$

worin $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ fort-

schreitende und in der Umgebung des Werthepaares $x=a,\ y=b$ convergirende Reihen bedeuten.

Es sei nunmehr $x=a,\ y=b$ ein Werthepaar, für welches $\Delta=0$ wird, und zwar von der Art, dass die Wurzel $y=\eta$ dieser Gleichung, die für $x=a$ in b übergeht, in der Umgebung von $x=a$ eindeutig und stetig verläuft, also η nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ entwickelt werden kann. Für $y=\eta$ möge y' die mehrfache Wurzel $y'=\zeta$ haben, und ζ für $x=b$ endlich sein, dann giebt es eine Gruppe von α Functionen y', welche die Darstellung haben

$$y' = \zeta+g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\cdots, \qquad (\alpha\leqq n)$$

wo $\zeta,\ g_0,\ g_1,\ \dots$ ebenso wie η nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen sind und η für $x=a$ den Werth b annimmt.

Die partielle Differentialgleichung lautet daher in der Umgebung von $x=a,\ y=b$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\zeta+g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\cdots).$$

Setzt man nun

$$y = \eta+u^\alpha$$

und bezeichnet φ, als Function von x und u betrachtet, mit $\overline{\varphi}$, so ist

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d\eta}{dx},\quad \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u}=\alpha u^{\alpha-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Es ist also

$$\alpha u^{\alpha-1}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x} = -\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u}\Big(\zeta-\frac{d\eta}{dx}+g_0u^\varkappa+g_1u^{\varkappa+1}+\cdots\Big)$$

gültig in der Umgebung von $x=a,\ u=0$.

Ist nun 1) $\zeta-\frac{d\eta}{dx}$ nicht identisch Null, so setzen wir voraus, dass es auch für $x=a$ von Null verschieden ist, man kann dann die Gleichung umgestalten in:

$$(13.)\qquad \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u} = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}\{h_0+h_1u+h_2u^2+\cdots\},$$

wo $h_0,\ h_1,\ \dots$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen sind. Sie hat also die Form (10.) und wird durch die Reihe

$$(14.)\qquad \overline{\varphi} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\varphi^\nu(x)\frac{u^\nu}{\nu!}$$

in der Art befriedigt, dass φ^0, φ^1, ... nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen bedeuten, von denen φ^0 willkürlich ist und die übrigen durch φ^0 eindeutig bestimmt sind.

Ist 2) $\zeta-\frac{d\eta}{dx}$ identisch Null und verschwinden gleichzeitig $g_0, g_1, \ldots, g_{\lambda-1}$ für $x=a$, während g_λ nicht verschwindet, und setzt man hier voraus, dass g_λ auch für $x=a$ nicht verschwindet, so wird, wenn $\alpha-1 \geqq \varkappa+\lambda$, die Umformung in die Gestalt (13.) möglich sein und folglich die Form der Lösung (14.) gelten. Wenn aber $\alpha-1<\varkappa+\lambda$, dann erhält man

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\{g_\lambda u^\mu+g_{\lambda+1}u^{\mu+1}+\cdots\} \qquad (\mu=\varkappa+\lambda-\alpha+1),$$

und wenn man den eingeklammerten Ausdruck in der rechten Seite nach Potenzen von $x-a$ ordnet:

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\left\{h_0+h_1(x-a)+h_2\frac{(x-a)^2}{1.2}+\cdots\right\},$$

wo h_0, h_1, ... nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreitende Reihen bedeuten. Diese Gleichung hat die Form (12.) und ihr wird durch die Reihe

$$\bar{\varphi} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\psi^\nu\frac{(x-a)^\nu}{\nu!} \tag{15.}$$

genügt, wo ψ^0, ψ^1, ... nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreitende Reihen bedeuten, von denen ψ^0 willkürlich ist und die übrigen Functionen durch ψ^0 eindeutig bestimmt sind.

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, dass für $y=\eta$ $y'=\infty$ wird und also eine Gruppe von α Functionen y' die Darstellung hat

$$y' = (y-\eta)^{-\frac{\varkappa}{\alpha}}\{g_0+g_1(y-\eta)+g_2(y-\eta)^2+\cdots\} \qquad (\varkappa>0),$$

wo g_0 nicht identisch verschwindet; wir setzen dann voraus, dass g_0 auch für $x=a$ nicht verschwindet. Die partielle Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\{g_0+g_1(y-\eta)+\cdots\},$$

und indem man wieder die Variable $u=(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ einführt:

$$\alpha u^{\varkappa+\alpha-1}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\left\{-u^\varkappa\frac{d\eta}{dx}+g_0+g_1u^\alpha+\cdots\right\}.$$

Da g_0 für $x=a$ von Null verschieden ist, so kann die Gleichung auf die Form (13.), ihre Lösung also auf die Form (14.) gebracht werden. Die

Formeln (14.) und (15.) stellen beide auf den rechten Seiten Reihen dar, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ und u fortschreiten, nur dass bei der einen die willkürliche Function eine Function von u, bei der anderen von x ist. In der Umgebung jedes Werthepaares $x=a$, $y=b$, für welches ein Factor $y-\eta$ von Δ verschwindet, wird also, falls η bei $x=a$ stetig ist, und gewisse nicht identisch verschwindende Functionen von x auch für $x=a$ von Null verschieden sind — durch welche Vorbehalte nur isolirte Werthepaare ausgeschlossen sind — eine Lösung φ existiren von der Form

$$\varphi = l_0+l_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}+l_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}}+\cdots,$$

worin l_0, l_1, ... nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen bezeichnen. Wir können die Reihe in der Form schreiben

$$(16.)\qquad \varphi = L_0+L_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}+L_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}}+\cdots+L_{\alpha-1}(y-\eta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

wo L_0, L_1, ..., $L_{\alpha-1}$ Reihen bedeuten, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-\eta$ fortschreiten. Die Gleichung (16.) repräsentirt wegen der α Werthe von $(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ α von einander verschiedene Lösungen

$$\varphi=\varphi_1,\quad \varphi=\varphi_2,\quad \ldots,\quad \varphi=\varphi_{\alpha-1}.$$

Jede symmetrische Function von φ_1, φ_2, ..., $\varphi_{\alpha-1}$ wird offenbar durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-\eta$ fortschreitende Reihe dargestellt, und da η eine Reihe von der Form

$$\eta = b+\alpha_1(x-a)+\alpha_2(x-a)^2+\cdots$$

ist, schliesslich durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ fortschreitende Reihe dargestellt.

Durch die vorangehenden Darlegungen ist betreffs der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y' = 0,$$

worin y' als algebraische Function von x und y durch die Gleichung

$$f(x,\ y,\ y') = 0$$

gegeben ist, oder einfacher betreffs der partiellen Differentialgleichung

$$(17.)\quad A_0\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^n-A_1\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+A_2\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^{n-2}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2+\cdots+(-1)^nA_n\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^n=0$$

folgender Satz bewiesen:

Schliesst man gewisse isolirte Werthepaare x, y aus, so kann man für ein sonst beliebig gewähltes Werthepaar $x = a$, $y = b$ n verschiedene Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ der partiellen Differentialgleichung (17.) angeben, von der Art, dass ihre symmetrischen Functionen sich durch Reihen darstellen lassen, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ fortschreiten und in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ convergent sind.

Führt man, um eine Gleichung zu erhalten, deren Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sind, für ihre elementar-symmetrischen Functionen die Reihen ein:

$$\begin{aligned} \varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n &= -B_1(x-a,\ y-b), \\ \varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_3+\cdots+\varphi_{n-1}\varphi_n &= \quad B_2(x-a,\ y-b), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n &= (-1)^n B_n(x-a,\ y-b), \end{aligned}$$

so erhält man

$$\varphi^n+B_1\varphi^{n-1}+B_2\varphi^{n-2}+\cdots+B_n = 0$$

als in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ gültige Integralgleichung der partiellen Differentialgleichung (17.), und indem man $\varphi = C$ setzt,

$$C^n+B_1C^{n-1}+B_2C^{n-2}+\cdots+B_n = 0 \tag{18.}$$

als allgemeine Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung (1.), worin $B_1, \dots, B_n$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ fortschreitende und in der Umgebung des Werthepaares $x = a$, $y = b$ convergirende Reihen bedeuten.

Die Functionen $B_1, \dots, B_n$ gestatten Fortsetzungen in dem Gesammtgebiet der Werthepaare, wobei ein gewisser ein oder mehrere Continuen bildende Complex von Werthepaaren, in denen eine der Functionen B unendlich wird, und gewisse isolirte Paare, in denen sie unbestimmt werden, zu umgehen sind. In der Umgebung der letzteren Paare giebt es überhaupt keine Darstellung der Integralgleichung von obiger Beschaffenheit. Was aber das Ensemble der ersteren betrifft, so giebt es in der Umgebung eines ihm angehörenden Werthepaares wiederum eine Integralgleichung

$$C'^n+B'_1C'^{n-1}+\cdots+B'_n = 0 \tag{18^a.}$$

der erwähnten Eigenschaft.

Die Beziehung zwischen den Wurzeln von (18.) und (18ª.) ergiebt sich aus der Bemerkung, dass, wenn

$$u_1(x,\ y) = C,\quad u_2(x,\ y) = C,\quad \dots,\quad u_n(x,\ y) = C$$

n vollständige Lösungen der Differentialgleichung (1.) bezeichnen, derart

dass zwischen $u_1, \ldots, u_n$ keine von x und y unabhängige Relation stattfindet, alle Lösungen überhaupt durch

$$\varphi_1(u_1) = C, \quad \varphi_2(u_2) = C, \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_n) = C$$

gegeben sind, wo $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ n willkürliche Functionen bezeichnen. Nennt man nun die Wurzeln von (18.) und (18ᵃ.) beziehlich

$$c_1, \ldots, c_n; \quad c_1', \ldots, c_n',$$

so besteht also die Relation

$$c_1' = \varphi_1(c_1), \quad c_2' = \varphi_2(c_2), \quad \ldots, \quad c_n' = \varphi_n(c_n).$$

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir die Gleichung

$$f(x, y) = C\varphi(x, y)e^{\frac{1}{\psi(x, y)}},$$

wo f, φ, ψ Polynome in x und y bezeichnen. Sie genügt als allgemeine Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades in y' mit ganzen rationalen Coefficienten in x und y. Für alle Werthepaare $x = a$, $y = b$, die weder φ noch ψ zu Null machen, gestattet C selbst die Darstellung

$$C = \mathfrak{P}(x-a, y-b),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ fortschreitende Reihe bezeichnet. Wird für $x = a$, $y = b$ $\varphi = 0$, aber weder $f = 0$ noch $\psi = 0$, dann ist

$$C' = \frac{1}{C} = \frac{\varphi e^{\frac{1}{\psi}}}{f} = \mathfrak{P}(x-a, y-b).$$

Ist endlich für $x = a$, $y = b$ $\psi = 0$, während f und φ von Null verschieden sind, dann ist

$$C' = \frac{1}{\log C} = \frac{\psi}{\psi(\log f - \log\varphi) - 1} = \mathfrak{P}(x-a, y-b).$$

Die Polynome f und φ können offenbar ohne gemeinsamen Theiler vorausgesetzt werden, die Theiler aber, die ψ mit f oder φ gemein hat, verschwinden aus der Differentialgleichung, welche lautet

$$\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right) = f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y'\right) - \frac{f\varphi}{\psi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}y'\right).$$

Da also für die Werthepaare $x = a$, $y = b$, die diese gemeinsamen Theiler zum Verschwinden bringen, im Allgemeinen y' nicht unbestimmt wird, so giebt es auch für diese eine Darstellung des Integrales von der Form:

$C' = \mathfrak{P}(x-a,\ y-b)$, wo C' wieder eine Function von C ist, die aber durch elementare Transcendenten nicht ausgedrückt werden kann. Ausgeschlossen sind diejenigen isolirten Punktepaare, für welche zwei der Polynome f, φ, ψ noch verschwinden, nachdem die erwähnten gemeinsamen Theiler abgetrennt sind.

II.

Wir legen jetzt eine endliche Gleichung

$$F(x,\ y,\ C) = 0 \tag{19.}$$

vom $n$ten Grade in C zu Grunde, in der die Coefficienten analytische Functionen von x und y sind von der am Schlusse des vorigen Abschnittes angegebenen Beschaffenheit.

Differentiiren wir die Gleichung (19.) total nach x, indem wir C als durch diese Gleichung bestimmte Function von x und y betrachten, so erhalten wir die für jedes beliebige y als Function von x gültige Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y' = -\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx}, \tag{20.}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y' = \frac{dC}{dx}$$

gesetzt ist.

Multiplicirt man die n Gleichungen, die aus (19.) entstehen, wenn man für C die n Wurzeln $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ der Gleichung (19.) einsetzt, so ergiebt sich identisch

$$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{C=C_\varkappa}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{C=C_\varkappa}y'\right) = (-1)^n\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{C=C_\varkappa}\frac{dC_1}{dx}\cdot\frac{dC_2}{dx}\cdots\frac{dC_n}{dx}. \tag{21.}$$

$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{C=C_\varkappa}$ ist die Discriminante der Gleichung (19.) in Bezug auf C, die wir mit D bezeichnen. Die Identität (21.) kann demnach in der Form geschrieben werden:

$$M(A_0y'^n+A_1y'^{n-1}+\dots+A_n) = (-1)^nD\frac{dC_1}{dx}\cdot\frac{dC_2}{dx}\cdots\frac{dC_n}{dx},$$

worin M ein nur x und y enthaltender Factor ist, der, wenn die Gleichung (19.) nicht algebraisch ist, auch transcendent sein kann, und $A_0,\ A_1,\ \dots,\ A_n$ ganze rationale Functionen von x und y ohne gemeinsamen Theiler bedeuten. Der in Klammern befindliche y' enthaltende Factor, den wir, wie

im ersten Abschnitt, mit $f(x, y, y')$ bezeichnen, stellt, gleich Null gesetzt, die Differentialgleichung dar, der die Gleichung (19.) als allgemeine Integralgleichung genügt. Es besteht also die für jedes x und y identische Gleichung

$$(22.)\qquad Mf(x, y, y') = (-1)^n D\frac{dC_1}{dx}\cdot\frac{dC_2}{dx}\cdots\frac{dC_n}{dx}\text{*)}.$$

Für das Folgende ist es noch nothwendig, den Einfluss zu untersuchen, welchen die Aenderung der Integralgleichung (19.) durch Einführung von willkürlichen Functionen der Wurzeln $C_\varkappa$ statt dieser Wurzeln selbst auf die Functionen D und M ausübt. Es sei

$$F'(x, y, C') = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln $C'_1, \dots, C'_n$ mit denen der Gleichung (19.) in der Beziehung

$$C'_1 = \varphi_1(C_1),\quad C'_2 = \varphi_2(C_2),\quad \dots,\quad C'_n = \varphi_n(C_n)$$

stehen. Die Gleichung $F' = 0$ genügt offenbar mit $F = 0$ derselben Differentialgleichung; man erhält daher analog mit (22.):

$$M'f(x, y, y') = (-1)^n D'\frac{dC'_1}{dx}\cdot\frac{dC'_2}{dx}\cdots\frac{dC'_n}{dx},$$

wo D' die Discriminante von F' in Beziehung auf C' und M' wie M einen von y' freien Factor bedeutet. Andererseits ergiebt sich, wenn man die Gleichung (22.) mit $\frac{dC'_1}{dC_1}\cdot\frac{dC'_2}{dC_2}\cdots\frac{dC'_n}{dC_n}$ multiplicirt:

$$M\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\frac{dC'_\varkappa}{dC_\varkappa}f(x, y, y') = (-1)^n D\frac{dC'_1}{dx}\cdot\frac{dC'_2}{dx}\cdots\frac{dC'_n}{dx}.$$

---

*) Den Ausdruck $\frac{M}{D}$ kann man, wenn f vom zweiten Grade in y' ist, als integrirenden Factor bezeichnen, denn seine Kenntniss reicht hin, wie Herr *Weingarten* (Sitzungsberichte der Berl. Academie 1883, XLIII. 1166 u. d. J. Bd. 103) gezeigt hat, die Gleichung $f = 0$ durch blosse Quadraturen zu integriren. Sind nämlich $adx + bdy$, $a'dx + b'dy$ die beiden linearen Factoren der Form $\frac{M}{D}f.dx^2$, so folgen aus (22.) die Gleichungen

$$e^{\varphi}(adx + bdy) = dC_1,\quad e^{-\varphi}(a'dx + b'dy) = dC_2,$$

deren Integrabilitätsbedingungen die Differentialquotienten von φ, also φ durch Quadratur bestimmen. Ist φ gefunden, so ergeben sich C_1 und C_2 durch neue Quadraturen.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$(23.)\qquad \frac{D'}{M'} = \frac{D}{M} : \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{dC'_\varkappa}{dC_\varkappa} = \frac{D}{M}\psi_1(C_1)\dots\psi_n(C_n),$$

wo $\psi_1, \dots, \psi_n$ beliebige Functionen bedeuten.

Aus (22.) folgt nun, dass $f(x, y, y') = 0$ befriedigt wird:

1) Wenn $C_\varkappa =$ willk. Const. ($\varkappa = 1, 2, \dots, n$).

Denn für einen beliebigen Werth der Constanten kann durch diese Gleichungen die von y' freie Gleichung $\frac{M}{D} = 0$ nicht erfüllt werden. Das sind die sogenannten vollständigen Lösungen, aus denen durch Particularisirung der Constanten die particulären Integrale hervorgehen.

2) Wenn $\frac{D}{M} = 0$.

Wird diese Gleichung durch die Function $y = \eta(x)$ erfüllt, welche in den Gleichungen $C_\varkappa =$ Const. nicht als particuläre Lösung enthalten ist, so heisst $y = \eta$ ein singuläres Integral. Aus (23.) geht hervor, dass alle singulären Integrale, die aus $\frac{D}{M} = 0$ gewonnen werden, auch in $\frac{D'}{M'} = 0$ enthalten sind, und umgekehrt. Denn wenn $\frac{D}{M} = 0$ für $y = \eta$, so könnte $\frac{D'}{M'}$ nur dann nicht verschwinden, wenn $\psi_\varkappa(C_\varkappa) = \infty$ für $y = \eta$, dann wäre aber gegen die Voraussetzung $y = \eta$ ein particuläres Integral; ebenso folgt, da $\psi_\varkappa(C_\varkappa)$ für $y = \eta$ nicht Null sein darf, dass $\frac{D}{M}$ mit $\frac{D'}{M'}$ für ein singuläres Integral $y = \eta$ zugleich verschwinden muss. Wir können daher zur Entscheidung der Frage nach der Existenz singulärer Lösungen in gleicher Weise statt der Gleichung (19.) jede der transformirten Gleichungen $F'(x, y, C') = 0$ zu Grunde legen.

Da übrigens alle singulären Lösungen in der Discriminantengleichung $\Delta = 0$ der Differentialgleichung enthalten sein müssen, so haben $\frac{D}{M}$ und Δ die diesen Lösungen entsprechenden Factoren $y - \eta$ gemeinsam.

Es sei nun $y = \eta$ kein particuläres Integral, d. h. nicht aus Gleichung (19.) durch Particularisirung der willkürlichen Constanten C zu erhalten. Es handelt sich darum, zu entscheiden, wann $y = \eta$ ein singuläres Integral ist. Für $x = a$ möge η den Werth b erhalten, das Paar $x = a$, $y = b$ soll nicht zu den oben ausgeschlossenen Werthepaaren gehören und η in der Umgebung von $x = a$ eindeutig und stetig sein. Nach der Bemerkung am Schlusse des ersten Abschnittes giebt es zu jeder Wurzel $C_\varkappa$ eine analytische Function



$C'_\varkappa = \varphi_\varkappa(C_\varkappa)$, welche in der Umgebung von $x = a$, $y = b$ den Charakter einer ganzen algebraischen Function von x und y hat. Bilden wir nun die transformirte Gleichung

$$F'(x, y, C') = 0,$$

deren Wurzeln

$$C'_1 = \varphi_1(C_1), \quad C'_2 = \varphi_2(C_2), \quad \ldots, \quad C'_n = \varphi_n(C_n)$$

sind, so sind die Coefficienten der Potenzen von C' in dieser Gleichung Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ fortschreiten. Indem wir nun an dieser Gleichung die Untersuchung anstellen, nehmen wir an, die Gleichung

$$F(x, y, C) = 0$$

hätte bereits bei $x = a$, $y = b$ die verlangte Beschaffenheit.

Es sind dann

$$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{C=C_\varkappa} \quad \text{und} \quad \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{C=C_\varkappa}$$

ebenfalls in solchen Reihen darstellbar, folglich auch der Ausdruck

$$Mf(x, y, y') = \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right)_{C=C_\varkappa},$$

und da die Coefficienten von f ganze rationale Functionen von x und y sind, so ist auch M nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$, $y-b$ entwickelbar.

Ertheilen wir a in der x-Ebene eine stetige Aenderung, so wird η ebenfalls sich stetig von b aus ändern; wir können uns nun die Aenderung von a so klein und demzufolge η so nahe an b denken, dass die Convergenz der Coefficienten in F erhalten bleibt, wenn wir b durch die Function η ersetzen, falls nur x in einem gewissen Bezirk um a verbleibt. Zunächst ist klar, dass, wenn für $y = \eta$: $\frac{D}{M} = 0$ sein soll, D selbst verschwinden muss, da M bei $x = a$, $y = b$ endlich und stetig ist, also für $y = \eta$ nicht unabhängig von x unendlich werden kann. Daraus folgt, dass, wenn $y = \eta$ ein singuläres Integral sein soll, wenigstens zwei Wurzeln der Gleichung (19.) für $y = \eta$ einander gleich werden müssen, und die weitere Untersuchung wird sich darauf richten, aus dem in diesem Falle stets, wie gezeigt wird, für $y = \eta$ verschwindenden Ausdrucke auf der rechten Seite von (22.) die höchste Potenz von $y-\eta$ herauszuziehen, die als ein y' nicht enthaltender Factor zu M gehörig ist. Je nachdem der nach Entfernung dieser Potenz verbleibende Differentialausdruck für $y = \eta$ verschwindet oder nicht, ist $y = \eta$

ein Integral von $f=0$ oder nicht. Es mögen nun p Wurzeln C für $y=\eta$ den gleichen Werth ζ annehmen, wo ζ eine Function von x ist, die nicht constant sein darf, da, wie wir hier zunächst voraussetzen, $y=\eta$ kein particuläres Integral ist. Die Gleichung (19.), nach Potenzen von $y-\eta$, $C-\zeta$ geordnet, erhält dann die Form

$$F(x,\ y,\ C)\equiv(y-\eta)\mathfrak{P}_0(y-\eta,\ C-\zeta)+(C-\zeta)^p\mathfrak{P}_1(y-\eta,\ C-\zeta)=0,$$

wo $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$ Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $y-\eta$ und $C-\zeta$ mit von x abhängenden Coefficienten bedeuten, in denen von $C-\zeta$ nur die n ersten Potenzen vorkommen. $\mathfrak{P}_1$ ist noch für $y=\eta$, $C=\zeta$ von Null verschieden. Es folgt daraus für $\frac{\partial F}{\partial C}$ die Form:

$$\frac{\partial F}{\partial C} = (y-\eta)\mathfrak{P}_2(y-\eta,\ C-\zeta)+(C-\zeta)^{p-1}\mathfrak{P}_3(y-\eta,\ C-\zeta),$$

wo $\mathfrak{P}_3$ für $y=\eta$, $C=\zeta$ nicht verschwindet.

Es möge nun eine Gruppe von $\alpha\leqq p$ in $y=\eta$ sich verzweigenden Functionen C, die in $y=\eta$ den Werth ζ annehmen, die Entwickelung haben

$$C-\zeta = g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\cdots, \tag{24.}$$

worin, da C eine endliche Function von x und y in den betrachteten Gebieten ist, $\varkappa$ ebenso wie α von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind und g_0, g_1, ... wie η in der Umgebung von $x=a$ stetige Functionen von x bedeuten, von denen g_0 nicht identisch verschwindet.

Es wird dann der Exponent der niedrigsten Potenz von $y-\eta$ in der Entwickelung von $\frac{\partial F}{\partial C}$, nachdem man für $C-\zeta$ seinen Ausdruck in (24.) substituirt hat, nur dann kleiner als Eins sein, wenn

$$(p-1)\frac{\varkappa}{\alpha} < 1$$

ist, und in diesem Falle beginnt sie mit $(y-\eta)^{(p-1)\frac{\varkappa}{\alpha}}$; sonst wird er gleich oder grösser als Eins sein. Wir bezeichnen den Exponenten der niedrigsten Potenz von $y-\eta$ in der Entwickelung von $\frac{\partial F}{\partial C}$ nach Potenzen von $y-\eta$ mit m, so dass

$$\frac{\partial F}{\partial C} = (y-\eta)^m\mathfrak{P}_0(x,\ (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}})$$

ist, wo $\mathfrak{P}_0$ für $y=\eta$ nicht identisch verschwindet, und x in $\mathfrak{P}_0$ andeutet, dass

die Reihe nach Potenzen von $(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ von x abhängige Coefficienten hat. Da nun nach (24.)

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dx} &= \frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y' \\ &= \frac{d\zeta}{dx}+(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}\mathfrak{P}_1(x,\ (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}})+(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}-1}\mathfrak{P}_2(x,\ (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}})\Big(\frac{dy}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\Big),\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ für $y=\eta$ nicht identisch verschwinden, so folgt, dass

$$(25.)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial C}\dfrac{dC}{dx} = \mathfrak{P}_0(x,\ (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}})\Big[(y-\eta)^m\Big\{\dfrac{d\zeta}{dx}+(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}\mathfrak{P}_1(x,\ (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}})\Big\} \\ \qquad\qquad +(y-\eta)^{m+\frac{\varkappa}{\alpha}-1}\mathfrak{P}_2(x,\ (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}})\Big(\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{d\eta}{dx}\Big)\Big].\end{cases}$$

Dieser Ausdruck verschwindet stets für $y=\eta$. Denn offenbar ist es der Fall, wenn $m\geqq 1$ ist; ist aber $m<1$, dann ist, wie oben gezeigt, $m=(p-1)\frac{\varkappa}{\alpha}$, also $m+\frac{\varkappa}{\alpha}-1=p\frac{\varkappa}{\alpha}-1$, und da $p\geqq\alpha$ ist, so ist $m+\frac{\varkappa}{\alpha}-1\geqq\varkappa-1$, also entweder Null oder positiv, folglich stets $(y-\eta)^{m+\frac{\varkappa}{\alpha}-1}\Big(\frac{dy}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\Big)=0$ für $y=\eta$. Daraus folgt, dass $\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx}$ auch in dem Falle, wo $\frac{\varkappa}{\alpha}<1$, also $\frac{dC}{dx}$ unendlich wird, für $y=\eta$ verschwindet. Da nun der Ausdruck auf der rechten Seite in (22.) gleich $\prod\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\Big(\frac{\partial F}{\partial C}\Big)_{C=C_\varkappa}\frac{dC_\varkappa}{dx}$ ist, so ist hiermit der oben behauptete Satz, dass dieser Ausdruck stets mit D für $y=\eta$ verschwindet, erwiesen.

Ist nun $\frac{\varkappa}{\alpha}\geqq 1$, so erhält der Ausdruck (25.) auf der rechten Seite nach Abtrennung von $(y-\eta)^m$ für $y=\eta$ den Werth $\mathfrak{P}_0(x,\ (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}})\frac{d\zeta}{dx}$, welcher, nach unseren Voraussetzungen von Null verschieden ist.

Ist aber $\frac{\varkappa}{\alpha}<1$, dann ist in (25.) $(y-\eta)^{m+\frac{\varkappa}{\alpha}-1}$ die höchste gemeinsame Potenz von $y-\eta$, und nach Abtrennung dieses Factors bleibt

$$\mathfrak{P}_0\Big\{\Big(\frac{dy}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\Big)\mathfrak{P}_2+(y-\eta)^{1-\frac{\varkappa}{\alpha}}\Big(\frac{d\zeta}{dx}+(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}\mathfrak{P}_1\Big)\Big\},$$

ein Ausdruck, der, da $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ nach obigen Festsetzungen für $y=\eta$ von Null verschieden sind, $y-\eta$ nicht mehr als Factor enthält und doch für $y=\eta$ verschwindet.

Aus dem Vorhergehenden leitet man folgende Regel ab:

Es sei keiner der Werthe ζ, die C für $y=\eta$ annimmt, von x unabhängig, also $y=\eta$ kein particuläres Integral, so bilde man für alle Wurzeln C die Entwickelung von $C-\zeta$ nach Potenzen von $y-\eta$ von der Form (24.).

Ist nun in allen diesen Entwickelungen der Exponent der niedrigsten Potenz von $y-\eta$ grösser oder gleich Eins, so ist $y=\eta$ kein Integral der Differentialgleichung; ist dagegen in einer Entwickelungsgruppe dieser Exponent kleiner als Eins, was übrigens nur vorkommen kann, wenn mehrere Wurzeln C für $y=\eta$ gleich ζ werden, also $D=0$ ist, dann ist $y=\eta$ ein singuläres Integral.

Denn im ersten Falle wird der Ausdruck

$$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\partial F}{\partial C_\varkappa} \frac{dC_\varkappa}{dx} = Mf(x,\ y,\ y'),$$

durch eine gewisse Potenz von $y-\eta$ dividirt, ein Quotient, der für $y=\eta$ nicht verschwindet. Da aber nur M einen von y' freien Factor enthält, so ersieht man, dass $f(x,y,y')=0$ durch $y=\eta$ nicht befriedigt wird; im anderen Falle bleibt nach Abtrennung der höchsten Potenz von $y-\eta$ noch ein Ausdruck $M'f(x,y,y')$, der für $y=\eta$ verschwindet, während M' $y-\eta$ nicht mehr enthält, folglich muss $f(x,y,y')=0$ sein für $y=\eta$. Wir bemerken, dass der erstere Fall nur unter einer gewissen Bedingung zwischen den Coefficienten von $F(x,y,C)=0$ eintreten kann. Denn damit in der Entwickelung von $C-\zeta$ der Exponent der niedrigsten Potenz von $y-\eta$ grösser oder gleich Eins ist, muss für $y=\eta$, $C=\zeta$, falls ζ eine vielfache Wurzel ist, mit $F=0$ und $\frac{\partial F}{\partial C}=0$ gleichzeitig $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ sein.

Sehen wir jetzt, wie sich in den beiden unterschiedenen Fällen die Entwickelung von $y-\eta$ nach den Potenzen von $x-c$ gestaltet, wenn c eine willkürliche Grösse in der Umgebung von a bedeutet und y durch geeignete Particularisirung von C in der Gleichung $F(x,y,C)=0$ so bestimmt wird, dass für $x=c$ $y=\eta$ wird. In der Darstellung (24.)

$$C-\zeta = g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\cdots$$

ist unserer Annahme nach ζ nicht unabhängig von x und nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ und, wenn c hinlänglich nahe bei a, auch von $x-c$ darstellbar in der Form

$$\zeta = \zeta(c)+\alpha_1(x-c)+\alpha_2(x-c)^2+\cdots.$$

α_1 kann von Null verschieden angenommen werden, da $\frac{d\zeta}{dx}$ nur für isolirte Werthe von x verschwinden kann. Setzt man nun in der Darstellung (24.) $C=\zeta(c)$, damit für $x=c$ $y=\eta$ wird, so erhält man

$$(26.)\quad \begin{cases} -\alpha_1(x-c)-\alpha_2(x-c)^2+\cdots = g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\cdots \\ \qquad = g_0u^{\varkappa}+g_1u^{\varkappa+1}+\cdots \quad ((y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=u \text{ gesetzt}). \end{cases}$$

Da g_0 nach der obigen Festsetzung nicht identisch verschwindet, so ist auch g_0 für ein willkürliches c von Null verschieden, man erhält daher aus (26.) für $x-c$ die Entwickelung

$$x-c = -\frac{g_0(c)}{\alpha_1}u^{\varkappa}+\beta_1u^{\varkappa+1}+\cdots$$

und hieraus durch Umkehrung

$$u=(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=\sqrt[\varkappa]{-\frac{\alpha_1}{g_0(c)}}(x-c)^{\frac{1}{\varkappa}}+\gamma_2(x-c)^{\frac{2}{\varkappa}}+\cdots$$

und durch Erhebung in die αte Potenz

$$(27.)\qquad y-\eta = \sqrt[\varkappa]{\left(-\frac{\alpha_1}{g_0(c)}\right)^{\alpha}}(x-c)^{\frac{\alpha}{\varkappa}}+\delta_1(x-c)^{\frac{\alpha+1}{\varkappa}}+\cdots.$$

Ist nun $y=\eta$ kein Integral, so muss in allen Entwickelungen (24.), wie gezeigt worden, der Exponent der niedrigsten Potenz von $y-\eta$, also $\frac{\varkappa}{\alpha}$ gleich oder grösser als Eins sein, folglich muss $\frac{\alpha}{\varkappa}\leqq 1$ sein, der Exponent der niedrigsten Potenz in allen Entwickelungen von $y-\eta$ nach Potenzen von $x-c$ ist mithin nicht grösser als Eins. (Vgl. die Entwickelungen I. und II. im ersten Abschnitt.)

Ist dagegen $y=\eta$ ein singuläres Integral, so muss mindestens in einer der Entwickelungen (24.) $\frac{\varkappa}{\alpha}<1$ also $\frac{\alpha}{\varkappa}>1$ sein. Es giebt also in diesem Falle eine Gruppe von particulären in $x=c$ mit η übereinstimmenden Integralen y von der Art, dass der Exponent der niedrigsten Potenz von $x-c$ in der Entwickelung von $y-\eta$ grösser als Eins ist. (Vgl. die Entwickelung III. im ersten Abschnitt.)

Endlich betrachten wir den Fall, dass $y=\eta$ ein particuläres Integral ist, dann muss die Gleichung (19.)

$$F(x,\ y,\ C) = 0$$

für $y=\eta$ mindestens eine constante Wurzel C haben, die einfach oder vielfach sein kann, und zwar wird das Letztere eintreten, wenn, was uns hier besonders interessirt, $y=\eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung $D=0$ ist. Unter Beibehaltung der Voraussetzung, dass in der Umgebung eines Werthepaares $x=a$, $y=b$, durch welches $y=\eta$ befriedigt wird, die Coefficienten der Gleichung (19.) bereits die mehrfach erwähnte Beschaffenheit haben, gilt für eine Gruppe von Functionen C, die für $y=\eta$ in den constanten Werth e übergehen, die Darstellung

$$(28.)\quad \begin{cases} C-e = g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\cdots \\ = g_0u^{\varkappa}+g_1u^{\varkappa+1}+\cdots \qquad ((y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=u \text{ gesetzt}), \end{cases}$$

wo $\varkappa$ und α von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind und g_0 nicht identisch verschwindet. Soll nun der Gleichung (28.) eine Function y genügen, die für einen willkürlichen Werth $x=c$ in der Umgebung von a mit η übereinstimmt, oder eine Function u, die für $x=c$ verschwindet, so muss $C=e$ gesetzt werden. Man erhält also

$$0 = u^{\varkappa}\{g_0+g_1u+g_2u^2+\cdots\}.$$

Dieser Gleichung genügt aber ausser $u=0$ keine nach Potenzen von $x-c$ entwickelbare Function u, die für $x=c$ verschwindet, da g_0, wenn c willkürlich gewählt ist, für $x=c$ von Null verschieden ist.

Daraus folgt, dass aus der Gruppe der Wurzeln C, deren Darstellung durch (28.) gegeben ist, ausser $y=\eta$ selbst kein particuläres Integral y erhalten werden kann, welches für $x=c$ mit η übereinstimmt und von der Beschaffenheit ist, dass $y-\eta$ eine Entwickelung nach Potenzen von $x-c$ zulässt. Es kann nun vorkommen, dass gleichzeitig andere Wurzeln C existiren, die für $y=\eta$ einen von x abhängigen Werth ζ erhalten, und der Exponent der niedrigsten Potenz in der Entwickelung von $C-\zeta$ nach Potenzen von $y-\eta$ (24.) kleiner als Eins ist, dann ist $y=\eta$ gleichzeitig ein singuläres Integral.

Diese Resultate stehen, wie eine Vergleichung mit der Zusammenfassung S. 218 im ersten Abschnitte ergiebt, mit den entsprechenden aus der Betrachtung der Differentialgleichung gewonnenen Ergebnissen in vollständiger Uebereinstimmung.

Während indess von den Coefficienten der Differentialgleichung $f(x,y,y')=0$ eine Bedingung erfüllt werden muss, damit sie eine singuläre

also ist der Exponent der niedrigsten Potenz gleich 1 in Uebereinstimmung mit der Theorie, wonach er $\geqq 1$ sein muss. Die allgemeine Integralgleichung lautet

$$(3xy+2x^3+C)^2-4(y+x^2)^3 \;=\; 0.$$

Die totale Differentiation nach x giebt nach (22.) identisch

$$144y(y+x^2)^3(y-2xy'-y'^2) = 16(y+x^2)^3\frac{dC_1}{dx}\frac{dC_2}{dx} = D\frac{dC_1}{dx}\frac{dC_2}{dx},$$

hier ist D in $M = 144y(y+x^2)^3$ als Factor enthalten, daher befriedigt $D=0$ wohl die Gleichung $Mf(x,\, y,\, y')=0$, aber nicht $f=0$ selbst und ist also kein Integral. Dies ist auch durch Entwickelung von C nach Potenzen von $y-\eta = y+x^2$ zu erkennen:

$$C-x^3 \;=\; -3x(y+x^2)+2(y+x^2)^{\frac{3}{2}},$$

worin der Exponent der niedrigsten Potenz *nicht* kleiner als 1 ist. Specialisirt man C so, dass für $x=c$ $y=\eta$, also $y=-c^2$ wird, indem man $C=c^3$ setzt, so erhält man, wenn man noch wie oben $y=-x^2+u^2$ einführt,

$$-x^3+3xu^2+c^3 \;=\; 2u^3.$$

Diese Gleichung hat für $u=0$ die einfache Wurzel $x=c$, und die Entwickelung von $x-c$ nach Potenzen von u ist,

$$x-c \;=\; \frac{u^2}{c}+\alpha u^3+\cdots,$$

woraus dann weiter wie oben

$$y-\eta = y+x^2 = c(x-c)+\gamma(x-c)^{\frac{3}{2}}+\cdots$$

abgeleitet wird. $\frac{D}{M}$ hier $=\frac{1}{9y}$, gleich Null gesetzt, befriedigt offenbar $f(x,\, y,\, y')=0$, also ist $y=\infty$ ein Integral, und da es in $D=0$ nicht enthalten ist, muss es ein particuläres sein. Dies wird bestätigt, denn für $C=\infty$ erhält man $y=\infty$. Aber auch aus der Differentialgleichung ergiebt es sich, wenn man $y=\frac{1}{z}$ setzt; man erhält $z+2xz'-z'^2=0$. Für $z=0$ hat diese Gleichung $z'=0$ als *einfache* Wurzel, daraus allein folgt schon, dass $z=0$ oder $y=\infty$ ein particuläres Integral ist.

Die behandelte Gleichung giebt noch zu folgender Bemerkung Anlass. Hier ist

$$\varDelta = 4(y+x^2), \quad D = 16(y+x^2)^3,$$

Δ enthält also keinen Factor, der nicht in D vorkommt. Herr *Darboux**) sieht den Grund dafür, dass $\Delta = 0$ nicht singuläre Lösungen liefert, in dem Umstande, dass Δ im Allgemeinen noch andere Factoren enthalte, als in D auftreten. Er begründet diese Ansicht, indem er die Beziehung zwischen den Discriminanten D und Δ herstellt, die man leicht aus der Identität

$$Mf(x, y, y') = \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\frac{\partial F(x, y, C_\varkappa)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, C_\varkappa)}{\partial y} y'\right)$$

gewinnen kann. Sie lautet

$$M^{2n-2}\Delta = \Pi_{\varkappa,\lambda}\left\{\frac{\partial F(x, y, C_\varkappa)}{\partial x}\frac{\partial F(x, y, C_\lambda)}{\partial y} - \frac{\partial F(x, y, C_\lambda)}{\partial x}\frac{\partial F(x, y, C_\varkappa)}{\partial y}\right\}^2,$$

und da die rechte Seite offenbar den Factor

$$\Pi_{\varkappa,\lambda}(C_\varkappa - C_\lambda)^2 = D$$

enthält,

$$M^{2n-2}\Delta = D.\psi^2.$$

Herr *Darboux* schreibt diese Gleichung, wenn wir unsere Bezeichnungen anwenden,

$$\Delta = DC^2$$

und sieht C für den fremden Factor an, der in Δ im Allgemeinen noch auftritt. Wie aber aus der vorhergehenden expliciteren Gestalt der Gleichung erhellt, können die Factoren von ψ, die in D nicht enthalten sind, auch sämmtlich nur in M vorkommen, so dass die erwähnte Beziehung einen sicheren Schluss hinsichtlich der Factoren von Δ in Vergleichung mit denen von D überhaupt nicht gestattet. Wesentlich für die Frage nach der Existenz von singulären Lösungen ist nur, wie im vorhergehenden Abschnitte dargelegt ist — gleichgültig, ob Δ noch D fremde Factoren enthält oder nicht — das Verhältniss $D:M$. Wenn alle Factoren von D in gleicher oder höherer Potenz auch in M vorkommen, dann giebt es keine Enveloppe oder singuläre Lösung, und dies lässt sich, ohne M zu kennen, für jeden Factor $y-\eta$ von D durch die Anfangspotenz von $y-\eta$ in der Entwickelung von C nach Potenzen dieser Grösse entscheiden, wie oben angegeben ist.

In unserem Beispiele ist

$$n = 2, \quad M = 144y(y+x^2)^3, \quad \Delta = 4(y+x^2), \quad D = 16(y+x^2)^3,$$

*) Bulletin des sciences mathématiques, t. IV, 1873, p. 173ff.

und so ergiebt sich $\psi = 72y(y+x^2)^2$ als ein Factor, dessen von D fremder Bestandtheil y nicht in $\varDelta$, sondern in M enthalten ist.

Handelt es sich um eine Curvenschaar, die durch eine in Beziehung auf den Parameter C quadratische Gleichung mit überall eindeutigen von x und y abhängenden Coefficienten repräsentirt wird, so kann man die Bedingung, dass die gedachte Curvenschaar keine Enveloppe habe, in besonders einfacher Form ausdrücken.

Wir können der Integralgleichung die Form geben

$$(f(x,\ y)+C)^2 = \varphi(x,\ y).$$

Damit nun keine singuläre Lösung existire, ist nothwendig und hinreichend, dass $\varphi = 0$ nur solche einfachen Wurzeln $y = \eta$ hat, die der Function $f(x, y)$ von x unabhängige Werthe ertheilen, während die übrigen alle vielfach sind.

Denn macht $y = \eta$ $f(x, y)$ constant $= a$, dann ist $y = \eta$ ein particuläres Integral, und da $C = -a$ die einzige Wurzel obiger Gleichung ist, so kann es nicht zugleich eine Enveloppe für andere Integralcurven oder ein singuläres Integral sein. Ist im anderen Falle $y = \eta$ eine vielfache Wurzel von $\varphi = 0$, also

$$\varphi(x,\ y) = (y-\eta)^n \psi,$$

wo $n \geqq 2$ und $\psi(x, \eta)$ nicht identisch Null ist, so erhält man die Entwickelung

$$C+f(x,\ \eta) = -(f(x,\ y)-f(x,\ \eta))+(y-\eta)^{\frac{n}{2}}\{g_0+g_1(y-\eta)+\cdots\},$$

worin, da $f(x, y)-f(x, \eta) = (y-\eta)p(x, y)$ ist, der Exponent der niedrigsten Potenz von $y-\eta$ gleich oder grösser als 1 ist. Dies war aber das Kriterium dafür (s. S. 218), dass $y = \eta$ kein Integral ist.

Das Letztere kann man hier auch unmittelbar einsehen. Denn die Differentialgleichung, der obige Gleichung als allgemeines Integral genügt, ist

$$4\varphi\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2,$$

wo wieder zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y' = \frac{df}{dx}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y' = \frac{d\varphi}{dx}$$

gesetzt ist. Ist nun $\varphi = (y-\eta)^n\psi$, so ergiebt die Substitution dieses Ausdruckes und Division durch $(y-\eta)^n$

$$4\psi\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = (y-\eta)^{n-2}\left\{n\psi\left(y'-\frac{d\eta}{dx}\right)+(y-\eta)\frac{d\psi}{dx}\right\}^2.$$

Diese Gleichung kann, da $n \geqq 2$, durch $y = \eta$ nicht befriedigt werden; denn die rechte Seite verschwindet, die linke aber könnte, da $\psi(x, \eta)$ von Null verschieden ist, nur dann verschwinden, wenn $\frac{df}{dx}$ für $y = \eta$ identisch Null würde, was aber ausgeschlossen ist, da $f(x, y)$ der Voraussetzung nach nicht constant sein soll.

(Wäre dagegen $n = 1$, so erhielte man

$$4(y-\eta)\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = \left\{\psi\left(y' - \frac{d\eta}{dx}\right) + (y-\eta)\frac{d\psi}{dx}\right\}^2,$$

eine Gleichung, die, ohne dass sie $y-\eta$ zum Factor hat, doch durch $y = \eta$ befriedigt wird.) Da eine Differentialgleichung im Allgemeinen keine singuläre Lösung hat, so wird eine algebraische Differentialgleichung zweiter Ordnung hiernach im Allgemeinen eine Integralgleichung haben, deren Coefficienten, wenn sie überall eindeutig sind, obiger Bedingung genügen, oder es werden die Coefficienten derjenigen stets herstellbaren Integralgleichung zweiten Grades in Beziehung auf C, die in der Umgebung von $y = \eta$ und einem gewissen Bezirk der x-Ebene die Form

$$C^2 + \mathfrak{P}_1(x-a,\ y-\eta)C + \mathfrak{P}_2(x-a,\ y-\eta) = 0$$

hat, hinsichtlich der Wurzel η die erwähnte Beschaffenheit zeigen.

3. Die Gleichung $y'^2 X - Y = 0$,

wo

$$X = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m),$$
$$Y = (y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\dots(y-\alpha_n),$$

$a_1, a_2, \dots, a_m$ unter einander verschieden, ebenso $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Zwei Wurzeln y' werden einander gleich,

1) wenn $y = \alpha_\lambda$, wofür $y' = 0$,

2) wenn $x = a_\lambda$, wofür $y' = \infty$ wird.

Sowohl $y = \alpha_\lambda$ als $x = a_\lambda$ sind Integrale, letzteres ersieht man aus $Y\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = X$. Dass $y = \alpha_\lambda$ ein singuläres Integral ist, erkennt man aus der Differentialgleichung an der Anfangspotenz von y in der Entwickelung

$$y' = \frac{\sqrt{(\alpha_\lambda - \alpha_1)\dots(\alpha_\lambda - \alpha_n)}}{X}(y-\alpha_\lambda)^{\frac{1}{2}}(1 + \beta_1(y-\alpha_\lambda) + \cdots) \quad (\varkappa = 1,\ a = 2,\ \varkappa < a);$$

aber auch aus der Integralgleichung

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{Y}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = C$$

geht zunächst hervor, dass $y = \alpha_\lambda$ kein particuläres Integral ist, da

$$\int_0^{\alpha_\lambda} \frac{dy}{\sqrt{Y}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

endlich und von x abhängig ist. Dass es aber ein Integral ist, erkennt man aus der Entwickelung

$$C + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{\sqrt{(\alpha_\lambda - \alpha_1)\dots(\alpha_\lambda - \alpha_n)}} (y - \alpha_\lambda)^{\frac{1}{2}} + \beta (y - \alpha_\lambda)^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wo der Exponent der Anfangspotenz kleiner als Eins ist. Setzt man

$$C = -\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

so dass

$$C + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = (x - c) p(x)$$

wird, so erhält man die Entwickelung

$$y - \alpha_\lambda = b_2 (x-c)^2 + b_3 (x-c)^3 + \cdots,$$

woraus erkannt wird, dass $y = \alpha_\lambda$ eine Enveloppe für die Schaar der Integralcurven y ist, die vorstehende Gleichung mit dem Parameter c, der auch in den Coefficienten b_2, b_3, ... enthalten ist, darstellt.

Wäre α_λ eine p-fache Wurzel von $Y = 0$, $(p \geqq 2)$, dann würde $\int_0^{\alpha_\lambda} \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \infty$, also auch $C = \infty$ unabhängig von x sein, mithin wäre in diesem Falle $y = \alpha_\lambda$ ein particuläres Integral, was aus der Differentialgleichung an der Entwickelung

$$y' = g_0 y^{\frac{p}{2}} + \cdots \qquad (p \geqq 2)$$

zu erkennen wäre. Die vorstehenden Bemerkungen gelten in gleicher Weise für die Integrale $x = a_\lambda$.

4. Die Gleichung $y'^4 - 4y(xy' - 2y)^2 = 0$ (*Boole*).

Nach y' aufgelöst, giebt diese Gleichung die vier Werthe

$$y' = \sqrt{y}(x \pm \sqrt{x^2 - 4\sqrt{y}}), \quad y' = -\sqrt{y}(x \pm \sqrt{x^2 + 4\sqrt{y}});$$

mehrere dieser Werthe werden gleich, wenn

$$1) \quad y = \eta = 0, \qquad 2) \quad y = \eta = \frac{x^4}{16}.$$

$y = 0$ genügt der Differentialgleichung, ist also ein Integral. Zur weiteren Untersuchung entwickeln wir $\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{dx} = y'$ nach Potenzen von $y - \eta = y$. Die beiden Auflösungen

$$y' = \sqrt{y}(x - \sqrt{x^2 - 4\sqrt{y}}), \quad y' = -\sqrt{y}(x - \sqrt{x^2 + 4\sqrt{y}})$$

geben für ein beliebiges x, das von Null verschieden ist, Entwickelungen von der Form

$$y' = \pm\frac{2y}{x}+\alpha y^{\frac{3}{2}}+\cdots,$$

wodurch $y=0$ als particuläres Integral charakterisirt ist. Die beiden anderen Auflösungen

$$y'=\sqrt{y}(x+\sqrt{x^2-4\sqrt{y}}),\quad y'=-\sqrt{y}(x+\sqrt{x^2+4\sqrt{y}})$$

geben

$$y' = \pm 2xy^{\frac{1}{2}}+\beta y^{\frac{3}{2}}+\cdots,$$

was zeigt, dass gleichzeitig $y=0$ eine Enveloppe ist. Dies wird durch die Integralgleichung

$$y = C^2(x-C)^2$$

bestätigt, denn 1) geht $y=0$ aus $C=0$ hervor, ist also ein particuläres Integral, 2) berührt $y=0$ jede der Parabeln, die durch die Integralgleichung dargestellt sind, in deren Scheitel $x=C$, $y=0$. Die Gleichung $y=\eta=\frac{x^4}{16}$ genügt ebenfalls der Differentialgleichung, und zwar den beiden Auflösungen nach y':

$$y'=\sqrt{y}(x+\sqrt{x^2-4\sqrt{y}}),\quad y'=\sqrt{y}(x-\sqrt{x^2-4\sqrt{y}}).$$

Setzt man $y=\frac{x^4}{16}+u$, so erhält man

$$\frac{x^3}{4}+u' = \sqrt{\frac{x^4}{16}+u}\,(x\pm\sqrt{x^2-4\sqrt{x^4+16u}}),$$

also für ein von Null verschiedenes x

$$\frac{x^3}{4}+u' = \left(\frac{x^2}{4}+\frac{2u}{x^2}+\alpha_2u^2+\cdots\right)\left(x\pm\frac{\sqrt{-8}}{x}u^{\frac{1}{2}}\pm\beta_2u^{\frac{3}{2}}+\cdots\right),$$

$$u' = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}x.u^{\frac{1}{2}}+\frac{2u}{x}+\gamma u^{\frac{3}{2}}+\cdots,$$

also

$$\frac{dy}{dx}-\frac{d\eta}{dx} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}\,x(y-\eta)^{\frac{1}{2}}+g(y-\eta)^{\frac{3}{2}}+\cdots,\quad (\varkappa=1,\ a=2,\ \varkappa<a)$$

woraus hervorgeht, dass $y=\eta=\frac{x^3}{4}$ ein singuläres Integral ist. Dasselbe ergiebt sich aus der Integralgleichung. Setzt man in ihr $C=\frac{c}{2}$, damit y mit η für $x=c$ übereinstimmt, so erhält sie die Form

$$y-\frac{x^4}{16}=\frac{c^2}{4}\left(x-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{x^4}{16}=-\tfrac{1}{8}c^2(x-c)^2-\tfrac{1}{4}c(x-c)^3-\tfrac{1}{16}(x-c)^4,$$

welche zeigt, dass die Curve $y=\frac{x^4}{16}$ eine Enveloppe der Parabelschaar ist und zwar mit jeder der Parabeln eine Berührung erster Ordnung hat.

5. Die Gleichung $2xy(1+y'^2)-(xy'+y)^2=0$.

Ihre Auflösung lautet

$$y'=\frac{xy\pm\sqrt{2x.y.(y-x)^2}}{2xy-x^2}=\frac{y}{2y-x}\pm\frac{(y-x)\sqrt{2}\sqrt{y}}{\sqrt{x}(2y-x)}.$$

Zwei Wurzeln von y' werden gleich

1) für $y=0$, 2) für $y=x$.

Beide Gleichungen genügen der Differentialgleichung. $y=0$ ist ein singuläres Integral, denn für ein von Null verschiedenes x beginnt die Entwickelung von y' mit $y^{\frac{1}{2}}$; setzt man ferner

$$y = x+u,$$

so erhält man

$$1+u' = \frac{x+u}{x+2u}\pm\frac{u\sqrt{2}\sqrt{x+u}}{\sqrt{x+2u}},$$

$$u' = -\frac{u}{x+2u}\pm\frac{u\sqrt{2}\sqrt{x+u}}{\sqrt{x+2u}},$$

$$u' = \left(-\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)u+\alpha_2u^2+\cdots,$$

oder

$$\frac{d(y-x)}{dx} = \left(-\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)(y-x)+\cdots, \qquad (\alpha=1,\ \varkappa=1)$$

woraus zu ersehen, dass $y=x$ ein particuläres Integral ist.

Der Punkt $x=0$, $y=0$ gehört zu den in unseren Betrachtungen ausgeschlossenen, da für ihn y' unbestimmt ist. In der That hört $y=0$ in diesem Punkte auf, Enveloppe zu sein, und berührt daher auch nicht das Integral $y=x$ im Treffpunkte $x=0$, $y=0$.

Berlin, den 5. Mai 1893.

The numbers of sums of quadratic residues and of quadratic non-residues respectively taken n at a time and congruent to any given integer to an odd prime modulus p.

(By Mr. *J. C. Fields* in Meadville.)

Notation.

For brevity put $q=\frac{1}{2}(p-1)$ and let λ be a primitive root of prime modulus p. The q quadratic residues I will designate by $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ which are respectively congruent to $1, \lambda^2, \lambda^4, \ldots, \lambda^{p-3}$, the q quadratic non-residues by $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ which are respectively congruent to λ, $\lambda^3, \ldots, \lambda^{p-2}$. Suppose now that we have any congruence of the type $\rho\alpha_r+\sigma\alpha_s+\cdots\equiv\alpha_u$ or β_u where the left-hand member is a linear function of any number n of quadratic residues (ρ, σ etc. being integers) and the right-hand member is a quadratic residue or non-residue. Multiplying this congruence through by λ^{2a} where a is any integer $<q$, we obtain a congruence $\rho\alpha_{r+a}+\sigma\alpha_{s+a}+\cdots\equiv\alpha_{u+a}$ or β_{u+a} and conversely multiplying the latter congruence by λ^{2q-2a} we obtain the former. We see then that if we form all possible expressions of the same linear form $\rho\alpha_r+\sigma\alpha_s+\cdots$ by taking all possible arrangements of the q quadratic residues n at a time, the number of these expressions which are congruent to a given quadratic residue is the same whatever the given quadratic residue may be, also the number of such expressions which are congruent to any given quadratic non-residue is the same whatever the given quadratic non-residue may be. Further we see that if we multiply one of the above congruences through by any odd power of λ we obtain a congruence of the form $\rho\beta_r+\sigma\beta_s+\cdots\equiv\beta_u$ or α_u where quadratic residues and non-residues are interchanged in position and conversely we may return from this latter congruence to the one from which we have just derived it. Thence we see that the numbers of expressions

$\rho\alpha_r+\sigma\alpha_s+\cdots$ which are congruent to a quadratic residue and which are congruent to a quadratic non-residue respectively are the same as the numbers of expressions $\rho\beta_r+\sigma\beta_s+\cdots$ which are congruent to a quadratic non-residue and which are congruent to a quadratic residue respectively. In this paper we will only have to do with the forms

(A.) $$\alpha_r+\alpha_s+\cdots+k\alpha_t$$

(B.) $$\beta_r+\beta_s+\cdots+k\beta_t$$

where the α's and β's are all distinct and their coefficients all equal to unity with the exception of one whose coefficient may be any integer k. We will consider (A.) and (B.) each as the sum of n quantities, k of which are equal, the others being all distinct. Our notation will be as follows.

$P_{k,n}$ designates the number of expressions of the type (A.) which are congruent to any given quadratic residue = the number of expressions of the type (B.) which are congruent to any given quadratic non-residue.

$Q_{k,n}$ designates the number of expressions (A.) which are congruent to any given quadratic non-residue = the number of expressions (B.) which are congruent to any given quadratic residue.

$R_{k,n}$ designates the number of expressions (A.) which are congruent to 0 = the number of expressions (B.) which are congruent to 0.

S designates the number of sums $(\alpha_r+\beta_s)$, each made up of a quadratic residue and a quadratic non-residue, congruent to any given quadratic residue = (evidently by multiplying any congruence $\alpha_r+\beta_s\equiv\alpha_t$ by an odd power of λ, the α's and β's will interchange positions) the number of such sums of type $(\alpha_r+\beta_s)$ as are congruent to any given quadratic non-residue.

S' designates the number of sums of type $(\alpha_r+\beta_s)$ which are congruent to 0.

When $\varkappa=1$, instead of $P_{1,n}$, $Q_{1,n}$, $R_{1,n}$ I will use P_n, Q_n, R_n respectively, so that

P_n designates the number of sums of distinct quadratic residues taken n at a time, and congruent to any given quadratic residue = the number of sums of distinct quadratic non-residues taken n at a time, and congruent to any given quadratic non-residue.

Q_n designates the number of sums of distinct quadratic residues taken n at a time, and congruent to any given quadratic non-residue = the number of sums of distinct quadratic non-residues taken n at a time and congruent to any given quadratic residue.

R_n designates the number of sums of distinct quadratic residues or of distinct quadratic non-residues respectively taken n at a time and congruent to 0.

I will put $\varepsilon_i = 1$ or 0 and $e_i = \left(\frac{i}{p}\right) = +1$ or -1 according as i is a quadratic residue or non-residue of p, whence $\varepsilon_i = \frac{1}{2}(1+e_i)$. I will also put $\varepsilon = \frac{1}{2}\{1-(-1)^q\} = 1$ or 0 according as q is odd or even, and will throughout this paper, according to the ordinary notation for the Binomial Coefficients, designate by $\binom{q}{n}$ the coefficient of x^n in $(1+x)^q$.

Case of $n = 2$.

We will first find P_2, Q_2, R_2, S, S'. Consider all congruences of the following types, which can be formed with the q quadratic residues and the q quadratic non-residues, the two quantities on the left of any given congruence being distinct from one another.

$\alpha_{r_1}+\alpha_{s_1} \equiv \alpha_t$. The whole number of congruences of this type is	qP_2.
$\alpha_{r_2}+\beta_{s_2} \equiv \alpha_t$. - - - - - - - - -	qS.
$\beta_{r_3}+\beta_{s_3} \equiv \alpha_t$. - - - - - - - - -	qQ_2.
$\alpha_{r_4}+\alpha_{s_4} \equiv \beta_t$. - - - - - - - - -	qQ_2.
$\alpha_{r_5}+\alpha_{s_5} \equiv \beta_t$. - - - - - - - - -	qS.
$\beta_{r_6}+\beta_{s_6} \equiv \beta_t$. - - - - - - - - -	qP_2.
$\alpha_{r_7}+\alpha_{s_7} \equiv 0$. - - - - - - - - -	R_2.
$\alpha_{r_8}+\beta_{s_8} \equiv 0$. - - - - - - - - -	S'.
$\beta_{r_9}+\beta_{s_9} \equiv 0$. - - - - - - - - -	R_2.

pposing t any given integer, all possible congruences $c+d \equiv t (\text{mod.} p)$ ich can be formed, c and d being distinct integers each $< p$, are easily n to be $\frac{1}{2}(p-3)$ in number. The whole number of congruences belonging any one of the first three types above and having a given qua- c residue α_t on the right, must be $\frac{1}{2}(p-3)$. We have therefore $S+Q_2 = \frac{1}{2}(p-3)$. To any given pair of integers α_r, α_t there always sponds one and only one integer $\gamma < p$ such that $\alpha_r+\gamma \equiv \alpha_t (\text{mod.} p)$. α_t remaining constant, if we give to α_r in succession the values of the q quadratic residues excluding only α_t (which value of α_r would $\gamma = 0$) and, if 2 is a quadratic residue excluding also a value α_r

where $2\alpha_r \equiv \alpha_t$, we will have altogether $q-1-\varepsilon_2$ such congruences, which evidently include all congruences $\alpha_r+\alpha_s \equiv \alpha_t$ each counted twice (viz. once with $\gamma = \alpha_r$ and once with $\gamma = \alpha_s$), and all congruences $\alpha_r+\beta_s \equiv \alpha_t$ each counted once; this gives us evidently $2P_2+s = q-1-\varepsilon_2$.

Also from the 2nd, 5th and 8th of the types of congruence above we see that the whole number of sums of the type $\alpha_r+\beta_s$ must equal $2qs+s'$. But also plainly the number of such sums formed by pairing any residue with any non-residue, is q^2; therefore $2qs+s' = q^2$. Further from the criterion $D^q \equiv \left(\frac{D}{p}\right)$, (mod. p), we know that the quadratic residues are or are not congruent to the negatives of the quadratic non-residues according as q is odd or even, whence $s' = q\varepsilon$. Lastly taking the number of pairs of quadratic residues two at a time, from the 1st, 4th and 7th of the types of congruence above we find $q(P_2+Q_2)+R_2 = \frac{1}{2}q(q-1)$.

Collecting our results we have the five equations:

$$P_2+Q_2+S = q-1,\quad 2P_2+S = q-\varepsilon_2-1,\quad 2qs+s' = q^2,\quad s' = q\varepsilon,$$
$$q(P_2+Q_2)+R_2 = \tfrac{1}{2}q(q-1).$$

Hence we derive

$$(1.)\qquad \begin{cases} P_2 = \frac{1}{4}(q+\varepsilon-2\varepsilon_2-2), & Q_2 = \frac{1}{4}(q+\varepsilon+2\varepsilon_2-2), \\ R_2 = \frac{1}{2}q(1-\varepsilon), \quad S = \frac{1}{2}(q-\varepsilon), & S' = q\varepsilon, \end{cases}$$

and on substituting their values for ε and ε_2

$$(2.)\qquad \begin{cases} P_2 = \frac{1}{8}\left\{p-6-(-1)^{\frac{p-1}{2}}-2(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\right\}, \quad Q_2 = \frac{1}{8}\left\{p-2-(-1)^{\frac{p-1}{2}}+2(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\right\}, \\ R_2 = \frac{1}{8}(p-1)\left\{1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right\}, \quad S = \frac{1}{4}\left\{p-2+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right\}, \\ S' = \frac{1}{4}(p-1)\left\{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right\}. \end{cases}$$

Application to the Series of *Gauss*.

Using *Dirichlet*'s notation

$$\varphi(h,\ p) = \sum_{s=0}^{p-1} e^{s^2\frac{2h\pi i}{p}} = 1+2\Sigma e^{\alpha_r\frac{2h\pi i}{p}}$$

we have

$$0 = \sum_{s=0}^{p-1} e^{s\frac{2h\pi i}{p}} = 1+\Sigma e^{\alpha_r\frac{2h\pi i}{p}}+\Sigma e^{\beta_r\frac{2h\pi i}{p}},$$

whence

$$\varphi(h,\ p) = \Sigma e^{\alpha_r\frac{2h\pi i}{p}}-\Sigma e^{\beta_r\frac{2h\pi i}{p}} = \Sigma e^{h\alpha_r\frac{2\pi i}{p}}-\Sigma e^{h\beta_r\frac{2\pi i}{p}}$$
$$= \left(\frac{h}{p}\right)\left(\Sigma e^{\alpha_r\frac{2\pi i}{p}}-\Sigma e^{\beta_r\frac{2\pi i}{p}}\right) = \left(\frac{h}{p}\right)\varphi(1,\ p).$$

We have then

$$
\begin{aligned}
|\varphi(h,p)|^2 &= (\Sigma e^{\alpha_r \frac{2\pi i}{p}} - \Sigma e^{\beta_r \frac{2\pi i}{p}})^2 \\
&= 2(\Sigma e^{(\alpha_r+\alpha_s)\frac{2\pi i}{p}} + \Sigma e^{(\beta_r+\beta_s)\frac{2\pi i}{p}} - \Sigma e^{(\alpha_r+\beta_s)\frac{2\pi i}{p}}) + \Sigma e^{2\alpha_r \frac{2\pi i}{p}} + \Sigma e^{2\beta_r \frac{2\pi i}{p}} \\
&= 2\left\{(P_2+Q_2-S)(\Sigma e^{\alpha_r \frac{2\pi i}{p}} + \Sigma e^{\beta_r \frac{2\pi i}{p}}) + 2R_2 - S'\right\} + \Sigma e^{\alpha_r \frac{2\pi i}{p}} + \Sigma e^{\beta_r \frac{2\pi i}{p}} \\
&= 2\{S-P_2-Q_2+2R_2-S'\}-1 \\
&= (1-2\varepsilon)(2q+1) \\
&= (-1)^q p.
\end{aligned}
$$

We have therefore

$$
(3.) \qquad |\varphi(h,\ p)|^2 = p(-1)^q.
$$

General Case.

Consider all expressions of the type $\alpha_p+\alpha_s+\cdots+\alpha_t$, which consists of the sum of any $n-k$ distinct quadratic residues. To each such expression corresponds a congruence $\alpha_r+\alpha_s+\cdots\alpha_t \equiv \gamma$ (mod. p) where γ is a quadratic residue, a quadratic non-residue or 0. Here the number of congruences for which γ is any particular quadratic residue is $P_{1,n-k}$, the number for which γ is any particular quadratic non-residue is $Q_{1,n-k}$, and the number for which γ is 0 is $R_{1,n-k}$. The whole number of all congruences of the above type is of course the number of combinations of the q quadratic residues taken $n-k$ at a time, that is $\binom{q}{n-k} = q(P_{1,n-k}+Q_{1,n-k})+R_{1,n-k}$. Now k being any positive integer not a multiple of p, take all congruences formed by adding each term of the type $k\alpha_u$ to each of congruences of the above type. We obtain altogether thus $q\binom{q}{n-k}$ congruences, consisting namely of all congruences of the type $\alpha_r+\alpha_s+\cdots+\alpha_t+k\alpha_u \equiv \gamma+k\alpha_u$. We will first consider the left-hand side of these congruences. Here we have all expressions of the type $\alpha_r+\alpha_s+\cdots+\alpha_t+k\alpha_u$, where α_u may or may not coincide with any one of the first $n-k$ quadratic residues in this linear expression. If k is >1 these expressions are evidently all different from one another, and of those in which α_u is distinct from the first $n-k$ quadratic residues in the expression, there are in our notation $P_{k,n}$, $Q_{k,n}$, and $R_{k,n}$ congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-

residue, and to 0 respectively. Those expressions in which α_u coincides with one of the first $n-k$ distinct quadratic residues, include evidently all expressions of the type $\alpha_{r'}+\alpha_{s'}+\cdots+\alpha_{t'}+(k+1)\alpha_u$ where the α's are $n-k$ in number and all distinct from one another, and of these expressions there are $P_{k+1,n}$, $Q_{k+1,n}$, and $R_{k+1,n}$ congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue, and to 0 respectively. When therefore k is >1, of all expressions $\alpha_r+\alpha_s+\cdots+k\alpha_u$ occurring on the left-hand side of congruences of the above type, the numbers which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue, and to 0 respectively, are

$$(4.)\qquad P_{k,n}+P_{k+1,n},\quad Q_{k,n}+Q_{k+1,n},\quad R_{k,n}+R_{k+1,n}.$$

If however $k=1$, each expression $\alpha_r+\alpha_s+\cdots\alpha_t+1.\alpha_u$, in which α_u is distinct from the first $n-1$ quadratic residues in the expression, repeats itself n times, namely with each one of the n quadratic residues in turn added to the sum of the other $n-1$. Of these expressions we have therefore $nP_{1,n}$, $nQ_{1,n}$ and $nR_{1,n}$ congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue, and to 0 respectively. Of the expressions in which α_u coincides with one of the first $n-1$ distinct quadratic residues, each occurs but once, giving us the terms of type $\alpha_{r'}+\alpha_{s'}+\cdots+\alpha_{t'}+2\alpha_u$ of which $P_{2,n}$, $Q_{2,n}$ and $R_{2,n}$ are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue, and to 0 respectively. When therefore $k=1$, of all expressions $\alpha_r+\alpha_s+\cdots+k\alpha_u$ occurring on the left-hand side of congruences of the above type, the numbers which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue, and to 0 respectively, are

$$(5.)\qquad nP_{1,n}+P_{2,n},\quad nQ_{1,n}+Q_{2,n},\quad nR_{1,n}+R_{2,n}.$$

We will now turn to the expressions $\gamma+k\alpha_u$ on the right-hand side of congruences of the above type, k being any positive integer. Here any given expression $\gamma+k\alpha_u$ occurs $P_{1,n-k}$, $Q_{1,n-k}$ or $R_{1,n-k}$ times according as γ is a quadratic residue, a quadratic non-residue or 0. Also $k\alpha_u$ is congruent to a quadratic residue or non-residue according as k is a quadratic residue or non residue, and we may therefore replace the q terms of type $k\alpha_u$ by the q quadratic residues or by the q quadratic non-residues according as k is a quadratic residue or non-residue. We may thus replace the expressions $\gamma+k\alpha_u$ in the congruences by expressions of the type $\gamma+\alpha_v$ or

$\gamma+\beta_v$ to which they are congruent according as k is a quadratic residue or non-residue. We have now to consider the expressions $\gamma+k\alpha_u$, that is according as k is a quadratic residue or non-residue the expressions $\gamma+\alpha_v$ or $\gamma+\beta_v$, with reference to the numbers of such expressions which are congruent to a quadratic residue, to a quadratic non-residue, and to 0, each such expression being repeated $P_{1,n-k}$, $Q_{1,n-k}$ or $R_{1,n-k}$ times according as γ is a quadratic residue, a quadratic non-residue or 0.

1. Suppose k a quadratic residue, whence $\varepsilon_k=1$, and consider the expressions of type $\gamma+\alpha_v$. There will be four cases:

a.) If $\gamma=\alpha_w$ a quadratic residue distinct from α_v, we have the expression $\gamma+\alpha_v=\alpha_w+\alpha_v$ repeated $P_{1,n-k}$ times; also if $\gamma=\alpha_v$ we have the expression $\gamma+\alpha_w=\alpha_v+\alpha_w$ repeated $P_{1,n-k}$ times. Therefore altogether we have any given expression of the type $\alpha_v+\alpha_w$ repeated $2P_{1,n-k}$ times.

b.) If $\gamma=\alpha_v$ we have the expression $\gamma+\alpha_v=2\alpha_v$ repeated $P_{1,n-k}$ times.

c.) If $\gamma=\beta_w$ a quadratic non-residue, we have the expression $\gamma+\alpha_v=\beta_w+\alpha_v$ repeated $Q_{1,n-k}$ times.

d.) If $\gamma=0$ we have the expression $\gamma+\alpha_v=\alpha_v$ repeated $R_{1,n-k}$ times.

Now the numbers of distinct expressions of the type $\alpha_v+\alpha_w$ congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 are P_2, Q_2 and R_2 respectively and a.) gives us each such distinct expression repeated $2P_{1,n-k}$ times.

From a.) we have then $2P_2P_{1,n-k}$, $2Q_2P_{1,n-k}$ and $2R_2P_{1,n-k}$ expressions of type $\gamma+\alpha_v$ which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively.

Each of the q expressions $2\alpha_v$ is congruent to a distinct one of the q quadratic residues or of the q quadratic non-residues according as 2 is a quadratic residue or non-residue and therefore the numbers of distinct expressions of this type congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 are ε_2, $1-\varepsilon_2$ and 0 respectively, and b.) gives us each such distinct expression repeated $P_{1,n-k}$ times.

From b.) we have then $\varepsilon_2P_{1,n-k}$, $(1-\varepsilon_2)P_{1,n-k}$ and 0 expressions of the type $\gamma+\alpha_v$ which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively.

Also the numbers of distinct expressions of the type $\alpha_v+\beta_w$ congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 are S, S and S' respectively and c.) gives us each of these ex-

pressions repeated $Q_{1,n-k}$ times. From c.) we have thus $SQ_{1,n-k}$, $SQ_{1,n-k}$ and $S'Q_{1,n-k}$ expressions of the type $\gamma+\alpha_v$ which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively.

Evidently d.) gives us $R_{1,n-k}$ expressions of the type $\gamma+\alpha_v$ congruent to any given quadratic residue.

From a.), b.), c.) and d.) combined we have altogether therefore

$$(6.)\quad \begin{cases}(2P_2+\varepsilon_2)P_{1,n-k}+SQ_{1,n-k}+R_{1,n-k}, \quad (2Q_2-\varepsilon_2+1)P_{1,n-k}+SQ_{1,n-k},\\ \qquad\qquad 2R_2P_{1,n-k}+S'Q_{1,n-k}\end{cases}$$

expressions of the type $\gamma+\alpha_v$ congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively. These then are the numbers of expressions of the type $\gamma+k\alpha_v$ (k being a quadratic residue) on the right-hand side of above congruences, which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively.

2. Suppose k a quadratic non-residue, whence $\varepsilon_k=0$, and consider the expressions of type $\gamma+\beta_v$. There will be four cases precisely analogous to those above.

a'.) If $\gamma=\beta_w$ a quadratic non-residue distinct from β_v, we have the expression $\gamma+\beta_v=\beta_w+\beta_v$ repeated $Q_{1,n-k}$ times, also if $\gamma=\beta_v$ we have the expression $\gamma+\beta_w=\beta_v+\beta_w$ repeated $Q_{1,n-k}$ times. Therefore we have altogether any given expression of the type $\beta_v+\beta_w$ repeated $2Q_{1,n-k}$ times.

b'.) If $\gamma=\beta_v$ we have the expression $\gamma+\beta_v=2\beta_v$ repeated $Q_{1,n-k}$ times.

c'.) If $\gamma=\alpha_w$ a quadratic residue, we have the expression $\gamma+\beta_v=\alpha_w+\beta_v$ repeated $P_{1,n-k}$ times.

d'.) If $\gamma=0$ we have the expression $\gamma+\beta_v=\beta_v$ repeated $R_{1,n-k}$ times.

The numbers of distinct expressions of the type $\beta_v+\beta_w$ congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 are Q_2, P_2 and R_2 respectively and a'.) gives us each such distinct expression repeated $2Q_{1,n-k}$ times. From a'.) we have then $2Q_2Q_{1,n-k}$, $2P_2Q_{1,n-k}$ and $2R_2Q_{1,n-k}$ expressions of the type $\gamma+\beta_v$ which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively. Each of the q expressions $2\beta_v$ is congruent to a distinct one of the q quadratic residues or of the q quadratic non-residues according as 2 is a quadratic non-residue or residue and therefore the numbers of distinct expressions of this type congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic

non-residue and to 0 are $1-\varepsilon_2$, ε_2 and 0 respectively, and (5.) gives us each such distinct expression repeated $Q_{1,n-k}$ times. From b'.) we have then $(1-\varepsilon_2)Q_{1,n-k}$, $\varepsilon_2 Q_{1,n-k}$ and 0 expressions of type $\gamma+\beta_v$ which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively.

Also the numbers of distinct expressions of the type $\alpha_w+\beta_v$ congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 are S, S and S' respectively and c'.) gives us each of these expressions repeated $P_{1,n-k}$ times. From (c'.) we have thus $SP_{1,n-k}$, $SP_{1,n-k}$ and $S'P_{1,n-k}$ expressions of the type $\gamma+\beta_v$ which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively.

Finally d'.) gives us $R_{1,n-k}$ expressions of the type $\gamma+\beta_v$ congruent to any given quadratic residue.

From a'.), b'.), c'.) and d'.) combined we have altogether therefore

$$(7.)\quad \begin{cases} (2Q_2-\varepsilon_2+1)Q_{1,n-k}+SP_{1,n-k}, \quad (2P_2+\varepsilon_2)Q_{1,n-k}+SP_{1,n-k}+R_{1,n-k}, \\ \qquad\qquad 2R_2Q_{1,n-k}+S'P_{1,n-k} \end{cases}$$

expressions of type $\gamma+\beta_v$ congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively. These then are the numbers of expressions of the type $\gamma+k\alpha_u$ (k being a quadratic non-residue) on the right-hand side of above congruences, which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 respectively.

The formulae (6.) and (7.) hold for k a quadratic residue and for k a quadratic non-residue respectively. Multiplying the expressions in (6.) by ε_k and those in (7.) by $(1-\varepsilon_k)$ and taking the three sums formed by adding corresponding terms in the two sets of formulae, since $\varepsilon_k-1=0$ or $\varepsilon_k=0$ according as k is a quadratic residue or non-residue, we obtain formulae which hold whether k is a quadratic residue or non-residue. Thus in general the numbers of our expressions $\gamma+k\alpha_u$ which are congruent to any given quadratic residue, to any given quadratic non-residue and to 0 are respectively

$$(8.)\quad \begin{cases} \varepsilon_k\{(2P_2+\varepsilon_2)P_{1,n-k}+SQ_{1,n-k}+R_{1,n-k}\}+(1-\varepsilon_k)\{(2Q_2-\varepsilon_2+1)Q_{1,n-k}+SP_{1,n-k}\}, \\ \varepsilon_k\{(2Q_2-\varepsilon_2+1)P_{1,n-k}+SQ_{1,n-k}\}+(1-\varepsilon_k)\{2P_2+\varepsilon_2)Q_{1,n-k}+SP_{1,n-k}+R_{1,n-k}\}, \\ \varepsilon_k\{2R_2P_{1,n-k}+S'Q_{1,n-k}\}+(1-\varepsilon_k)\{2R_2Q_{1,n-k}+S'P_{1,n-k}\}. \end{cases}$$

The three expressions given by (8.) and deduced from the consideration

of the right-hand side of the congruences must of course be respectively equal to the corresponding three expressions deduced from the consideration of the left-hand side of the same congruences, and given by (4.) or (5.) according as k is $>$ or $=1$. Thus if k is >1

$$(9.)\quad \begin{cases} P_{k,n}+P_{k+1,n} = \varepsilon_k\{(2P_2+\varepsilon_2)P_{1,n-k}+SQ_{1,n-k}+R_{1,n-k}\} \\ \qquad\qquad +(1-\varepsilon_k)\{(2Q_2-\varepsilon_2+1)Q_{1,n-k}+SP_{1,n-k}\}, \\ Q_{k,n}+Q_{k+1,n} = \varepsilon_k\{(2Q_2-\varepsilon_2+1)P_{1,n-k}+SQ_{1,n-k}\} \\ \qquad\qquad +(1-\varepsilon_k)\{2P_2+\varepsilon_2)Q_{1,n-k}+SP_{1,n-k}+R_{1,n-k}\}, \\ R_{k,n}+R_{k+1,n} = \varepsilon_k\{2R_2P_{1,n-k}+S'Q_{1,n-k}\} \\ \qquad\qquad +(1-\varepsilon_k)\{2R_2Q_{1,n-k}+S'P_{1,n-k}\}. \end{cases}$$

From these equations eliminate $R_{1,n-k}$ by aid of the relation

$$q(P_{1,n-k}+Q_{1,n-k})+R_{1,n-k} = \binom{q}{n-k},$$

and we may write them thus:

$$P_{k,n}+P_{k+1,n} = P_{1,n-k}\{\varepsilon_k(2P_2-S+\varepsilon_2-q)+S\} \\ +Q_{1,n-k}\{\varepsilon_k(S-2Q_2-q+\varepsilon_2-1)+2Q_2-\varepsilon_2+1\}+\binom{q}{n-k}\varepsilon_k,$$

$$Q_{k,n}+Q_{k+1,n} = P_{1,n-k}\{\varepsilon_k(2Q_2-S-\varepsilon_2+q+1)+S-q\} \\ +Q_{1,n-k}\{\varepsilon_k(S-2P_2-\varepsilon_2+q)+2P_2+\varepsilon_2-q\}+\binom{q}{n-k}(1-\varepsilon_k),$$

$$R_{k,n}+R_{k+1,n} = P_{1,n-k}\{2\varepsilon_kR_2+(1-\varepsilon_k)S'\}+Q_{1,n-k}\{\varepsilon_k(S'-2R_2)+2R_2\}.$$

In these equations substitute for P_2, Q_2, R_2, S, S' their values given by (1.) and put $\varepsilon_k=\frac{1}{2}(1+e_k)$. We obtain

$$(10.)\quad \begin{cases} 2(P_{k,n}+P_{k+1,n}) = \{e_k(\varepsilon-q-1)-1\}P_{1,n-k}-(q+\varepsilon)e_kQ_{1,n-k}+\binom{q}{n-k}(1-e_k), \\ 2(Q_{k,n}+Q_{k+1,n}) = (q+\varepsilon)e_kP_{1,n-k}-\{e_k(\varepsilon-q-1)+1\}Q_{1,n-k}+\binom{q}{n-k}(1-e_k), \\ 2(R_{k,n}+R_{k+1,n}) = q\{(1-2\varepsilon)e_k+1\}P_{1,n-k}-q\{(1-2\varepsilon)e_k-1\}Q_{1,n-k}. \end{cases}$$

From (5.) we see that we can obtain the corresponding results for $k=1$ by substituting $nP_{1,n}$, $nQ_{1,n}$, $nR_{1,n}$ respectively for $P_{k,n}$, $Q_{k,n}$, $R_{k,n}$ in the expressions on the left-hand side of any of the equations just given. Thus from (10.) we derive:

$$(11.)\quad \begin{cases} 2(nP_{1,n}+P_{2,n}) = \{e_1(\varepsilon-q-1)-1\}P_{1,n-1}-(q+\varepsilon)e_1Q_{1,n-1}+\binom{q}{n-1}(1-e_1), \\ 2(nQ_{1,n}+Q_{2,n}) = (q+\varepsilon)e_1P_{1,n-1}-\{e_1(\varepsilon-q-1)+1\}Q_{1,n-1}+\binom{q}{n-1}(1-e_1), \\ 2(nR_{1,n}+R_{2,n}) = q\{(1-2\varepsilon)e_1+1\}P_{1,n-1}-q\{(1-2\varepsilon)e_1-1\}Q_{1,n-1}. \end{cases}$$

Since from consideration of the whole number of distinct expressions of type $\alpha_r+\alpha_s+\cdots+k\alpha_t$, the α's being $n-k+1$ in number and distinct from each other, we have

$$q(P_{1,n}+Q_{1,n})+R_{1,n}=\binom{q}{n},\quad q(P_{k,n}+Q_{k,n})+R_{k,n}=q\binom{q-1}{n-k},\qquad (k>1)$$

we can immediately determine $R_{1,n}$, $R_{k,n}$ when we know the values of $P_{1,n}$, $Q_{1,n}$, $P_{k,n}$, $Q_{k,n}$. We will therefore consider only the first two equations of each of the two sets of three equations (10.) and (11.). To the first equation in (10.) add the second equation multiplied by an arbitrary quantity z and we obtain

$$(12.)\quad\begin{cases}2(P_{k,n}+zQ_{k,n})+2(P_{k+1,n}+zQ_{k+1,n}) = \{e_k(\varepsilon-q-1)-1+z(q+\varepsilon)e_k\}P_{1,n-k}\\ \qquad -\{(q+\varepsilon)e_k+z(e_k(\varepsilon-q-1)+1)\}Q_{1,n-k}+\binom{q}{n-k}\{(1+e_k)+z(1-e_k)\}.\end{cases}$$

On the right-hand side of this equation the ratio of the coefficient of $Q_{1,n-k}$ to that of $P_{1,n-k}$ is

$$\frac{\{(\varepsilon+q)+z(\varepsilon-q-1)\}e_k+z}{-\{z(\varepsilon+q)+(\varepsilon-q-1)\}e_k+1}=z\quad\text{evidently if}\quad\frac{(\varepsilon+q)+z(\varepsilon-q-1)}{-\{z(\varepsilon+q)+(\varepsilon-q-1)\}}=z,$$

i. e. if z is a root of the quadratic equation

$$(13.)\qquad (\varepsilon+q)z^2+2(\varepsilon-q-1)z+(\varepsilon+q) = 0.$$

Denote the two roots of this equation by z', z''. These are evidently quantities independent of k and n and dependent upon p alone. Supposing now that z has one of these values, (12.) becomes

$$2(P_{k,n}+zQ_{k,n})+2(P_{k+1,n}+zQ_{k+1,n})$$
$$= \{e_k(\varepsilon-q-1)-1+z(\varepsilon+q)e_k\}(P_{1,n-k}+zQ_{1,n-k})+\binom{q}{n-k}\{(1+e_k)+z(1-e_k)\}.$$

For brevity put $N_{k,n} = P_{k,n}+zQ_{k,n}$, then

$$(14.)\quad\begin{cases}2(N_{k,n}+N_{k+1,n}) = \{e_k(\varepsilon-q-1)-1+z(\varepsilon+q)e_k\}N_{1,n-k}\\ \qquad\qquad +\binom{q}{n-k}\{(1+e_k)+z(1-e_k)\}.\end{cases}$$

When $k=1$, in like manner from (11.) we derive

$$(15.)\quad\begin{cases}2(nN_{1,n}+N_{2,n}) = \{e_1(\varepsilon-q-1)-1+z(\varepsilon+q)e_1\}N_{1,n-1}\\ \qquad\qquad +\binom{q}{n-1}\{(1+e_1)+z(1-e_1)\}.\end{cases}$$

Further put for brevity

$$(-1)^k a_k = e_k(\varepsilon-q-1)-1+z(\varepsilon+q)e_k=\varrho e_k-1,\quad (-1)^k h_{k,n}=\binom{q}{n-k}\{(1+e_k)+z(1-e_k)\},$$

$$\varrho = \varepsilon-q-1+z(\varepsilon+q).$$

Substituting for ε its value $\frac{1}{2}(1-(-1)^q)$, from (13.) we find (see 3)

$$\rho^2 = p(-1)^q = \varphi^2. \tag{16.}$$

We might also notice by the way that our quadratic equation (13.) may be written $(z+1)^2 = p(-1)^q(z-1)^2$ or $z+1 = \pm\varphi.(z-1)$. From (14.) and (15.) we derive

$$\begin{aligned}
2(-1)^{k-1}(N_{k-1,n}+N_{k,n}) &= a_{k-1}N_{1,n-k+1}+h_{k-1,n},\\
2(-1)^{k-2}(N_{k-2,n}+N_{k-1,n}) &= a_{k-2}N_{1,n-k+2}+h_{k-2,n},\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
2(-1)^2(N_{2,n}+N_{3,n}) &= a_2N_{1,n-2}+h_{2,n},\\
2(-1)^1(nN_{1,n}+N_{2,n}) &= a_1N_{1,n-1}+h_{1,n}.
\end{aligned}$$

Adding these $k-1$ equations we obtain

$$2(-1)^{k-1}N_{k,n}-2nN_{1,n} = a_{k-1}N_{1,n-k+1}+a_{k-2}N_{1,n-k+2}+\cdots+a_1N_{1,n-1}+\sum_{r=1}^{k-1}h_{r,n}. \tag{17.}$$

We have $2N_{n,n} = 2(P_{n,n}+zQ_{n,n}) = 2\{\varepsilon_n+z(1-\varepsilon_n)\} = 1+e_n+z(1-e_n) = h_{n,n}$. In (17.) putting $H_n = \sum_{r=1}^{n} h_{r,n}$ also putting $k=n$ and giving to n successively the values 1, 2, etc. we get

$$\begin{aligned}
2nN_{1,n}+a_1N_{1,n-1}+a_2N_{1,n-2}+\cdots+a_{n-2}N_{1,2}+a_{n-1}N_{1,1}+H_n &= 0,\\
2(n-1)N_{1,n-1}+a_1N_{1,n-2}+\cdots+a_{n-3}N_{1,2}+a_{n-2}N_{1,1}+H_{n-1} &= 0,\\
\cdots\cdots&\\
\cdots\cdots&\\
4N_{1,2}+a_1N_{1,1}+H_2 &= 0,\\
2N_{1,1}+H_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Solving for $N_{1,n}$ from these n equations we obtain

$$n!(-2)^nN_{1,n} = \begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & H_n\\
2(n-1) & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & H_{n-1}\\
0 & 2(n-2) & a_1 & \ldots & a_{n-4} & a_{n-3} & H_{n-2}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 4 & a_1 & H_2\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 & H_1
\end{vmatrix}. \tag{18.}$$

To the last column in this determinant add a multiple of each of the preceding columns, the quantity multiplying the rth column being $\frac{z-1}{\rho}\binom{q}{n-r}$.

Instead of H_{n-s} we will then have

$$G_{n-s} = H_{n-s}+\frac{z-1}{\varrho}\left\{2q\binom{q-1}{n-s-1}+\sum_{m=1}^{n-s-1}\binom{q}{n-s-m}a_m\right\}.$$

Now

$$H_{n-s} = \sum_{m=1}^{n-s}h_{m,n-s} = \sum_{m=1}^{n-s}\binom{q}{n-s-m}(-1)^m\{(1+e_m)+z(1-e_m)\},$$

whence

$$\begin{aligned}G_{n-s} &= (1+z)\sum_{m=1}^{n-s}\binom{q}{n-s-m}(-1)^m+(1-z)\sum_{m=1}^{n-s}\binom{q}{n-s-m}(-1)^m e_m\\ &\qquad +\frac{z-1}{\varrho}\left\{2q\binom{q-1}{n-s-1}+\sum_{m=1}^{n-s-1}\binom{q}{n-s-m}(-1)^m(\varrho e_m-1)\right\}\\ &= \frac{1-z}{\varrho}(-1)^{n-s}(\varrho e_{n-s}-1)+\left(1+z+\frac{1-z}{\varrho}\right)\sum_{m=1}^{n-s}\binom{q}{n-s-m}(-1)^m\\ &\qquad +\frac{2q(z-1)}{\varrho}\binom{q-1}{n-s-1}\\ &= \binom{q-1}{n-s-1}\left(\frac{2q(z-1)}{\varrho}+\frac{z-1}{\varrho}-z-1\right)+\frac{1-z}{\varrho}a_{n-s}\\ &= \frac{1-z}{\varrho}a_{n-s}\end{aligned}$$

since

$$\varrho(1+z)+p(1-z) = (\varepsilon+q)z^2+2(\varepsilon-q-1)z+(\varepsilon+q) = 0$$

by (13.).

Our new determinant then only differs from that in (18.) by substituting throughout the last column $G_{n-s} = \frac{1-z}{\varrho}a_{n-s}$ for H_{n-s} excepting in the top term of column for which we must plainly substitute

$$G_n-\frac{2q(z-1)}{\varrho}\binom{q-1}{n-1} = \frac{1-z}{\varrho}\left\{a_n+2q\binom{q-1}{n-1}\right\}.$$

We have then

$$\text{(19.)}\quad n!(-2)^n N_{1,n} = \frac{1-z}{\varrho}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n+2q\binom{q-1}{n-1}\\ 2(n-1) & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1}\\ 0 & 2(n-2) & a_1 & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & a_1 & a_2\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Dividing each row of this determinant through by -2 and putting $a_r = -2rb_r$ we may write (19.) in the form

$$(20.)\quad n!\,N_{1,n} = \frac{1-z}{\varrho}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & 2b_2 & \dots & (n-2)b_{n-2} & (n-1)b_{n-1} & nb_n \\ -(n-1) & b_1 & \dots & (n-3)b_{n-3} & (n-2)b_{n-2} & (n-1)b_{n-1} \\ 0 & -(n-2) & \dots & (n-4)b_{n-4} & (n-3)b_{n-3} & (n-2)b_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -2 & b_1 & 2b_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_1 \end{vmatrix} - \frac{1-z}{\varrho}\binom{q}{n}$$

Now this last determinant we know to be $n!$ times the coefficient of x^n in the expansion of $e^{b_1x+b_2x^2+\dots+b_rx^r+\dots}$. Call this coefficient C_n. Then on dividing (20.) through by $n!$ we obtain

$$(21.)\qquad N_{1,n} = \frac{1-z}{\varrho}\left\{C_n-\binom{q}{n}\right\}.$$

Here z is a root of the quadratic equation (13.). Indicating by one or two dashes respectively that z' or z'' is substituted for z in any quantity depending upon z, we have

$$N'_{1,n} = \frac{1-z'}{\varrho'}\left\{C'_n-\binom{q}{n}n!\right\},\quad N''_{1,n} = \frac{1-z''}{\varrho''}\left\{C''_n-\binom{q}{n}n!\right\}.$$

Putting

$$f(x) = \Sigma\frac{e_r}{r}(-x)^r = \Sigma\left(\frac{r}{p}\right)\cdot\frac{(-x)^r}{r}$$

we find

$$e^{\Sigma b_rx^r} = e^{\Sigma\frac{1-\varrho e_r}{2r}(-x)^r} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\varrho f(x)}$$

and C_n is therefore the coefficient of x^n in the expansion of $(1+x)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\varrho f(x)}$.

From (21.) we obtain

$$(z''-z')P_{1,n} = z''N'_{1,n}-z'N''_{1,n} = \left(\frac{z''(z'-1)}{\varrho'}-\frac{z'(z''-1)}{\varrho''}\right)\binom{q}{n}+\text{coefficient of } x^n \text{ in}$$
$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{z''(1-z')}{\varrho'}e^{-\frac{1}{2}\varrho' f(x)}-\frac{z'(1-z'')}{\varrho''}e^{-\frac{1}{2}\varrho'' f(x)}\right\}.\ .\ .$$

Hence noting that $\varrho' = -\varrho'' = \sqrt{p(-1)^q}$ by (16.), substituting for z', z'' their values given by (13.) and putting $\varrho = \varrho'$ we find

$$2pP_{1,n} = 2\binom{q}{n}-\text{coefficient of } x^n \text{ in}$$
$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}\{(1-\varrho(-1)^q)e^{-\frac{1}{2}\varrho f(x)}+(1+\varrho(-1)^q)e^{\frac{1}{2}\varrho f(x)}\}.$$

Similarly

$$(z'-z'')Q_{1,n} = N'_{1,n}-N''_{1,n} = \binom{q}{n}\left(\frac{z'-1}{\varrho'}-\frac{z''-1}{\varrho''}\right) + \text{coefficient of } x^n \text{ in}$$
$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1-z'}{\varrho'}e^{-\frac{1}{2}\varrho' f}-\frac{1-z''}{\varrho''}e^{-\frac{1}{2}\varrho'' f}\right\}.$$

Hence

$$2pQ_{1,n} = 2\binom{q}{n} + \text{coefficient of } x^n \text{ in } (1+x)^{-\frac{1}{2}}\{(\varrho(-1)^q-1)e^{\frac{1}{2}\varrho f}-(\varrho(-1)^q+1)e^{-\frac{1}{2}\varrho f}\}.$$

Also

$$pR_{1,n} = p\binom{q}{n} - q(pP_{1,n}+pQ_{1,n}) = \binom{q}{n} + \text{coefficient of } x^n \text{ in } q(1+x)^{-\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{2}\varrho f}+e^{-\frac{1}{2}\varrho f}).$$

We may write our collected results in the following form

$$(22.)\quad \begin{cases} 2pP_n = \text{coefficient of } x^n \text{ in } 2(1+x)^q \\ \qquad -(1+x)^{-\frac{1}{2}}\{(e^{\frac{1}{2}\varrho f}+e^{-\frac{1}{2}\varrho f})+\varrho(-1)^q(e^{\frac{1}{2}\varrho f}-e^{-\frac{1}{2}\varrho f})\}, \\ 2pQ_n = \text{coefficient of } x^n \text{ in } 2(1+x)^q \\ \qquad -(1+x)^{-\frac{1}{2}}\{(e^{\frac{1}{2}\varrho f}+e^{-\frac{1}{2}\varrho f})-\varrho(-1)^q(e^{\frac{1}{2}\varrho f}-e^{-\frac{1}{2}\varrho f})\}, \\ 2pR_n = \text{coefficient of } x^n \text{ in } 2(1+x)^q+(p-1)(1+x)^{-\frac{1}{2}}\{e^{\frac{1}{2}\varrho f}+e^{-\frac{1}{2}\varrho f}\}. \end{cases}$$

Here $\varrho = \pm\sqrt{p(-1)^q} = \pm\varphi$ (see 3.), for in these formulae it plainly makes no difference whether we give a positive or negative sign to the radical, and $f = \Sigma\left(\frac{r}{p}\right)\frac{(-x)^r}{r}$. To find P_n, Q_n, R_n we evidently only require to take account of the first n terms in f when expanding our exponential functions. When q is odd $\varrho = \sqrt{-p} = i\sqrt{p}$ and we may write (22.) thus

$$(23.)\quad \begin{cases} pP_n = \text{coefficient of } x^n \text{ in } (1+x)^q-(1+x)^{-\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{p}.f+\sqrt{p}\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{p}.f), \\ pQ_n = \quad - \quad - \quad x^n \;-\; (1+x)^q-(1+x)^{-\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{p}.f-\sqrt{p}\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{p}.f), \\ pR_n = \quad - \quad - \quad x^n \;-\; (1+x)^q+(p-1)(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{p}.f. \end{cases}$$

Formulae (22.) and (23.) determine as the coefficients of certain generating functions the numbers which we sought.

We may remark, where ν is an integer prime to $p-1$, that (22.) gives the numbers of sums of the νth powers of the quadratic residues and of the quadratic non-residues respectively taken n at a time and congruent to any given integer to a prime modulus p. For if ν is prime to $p-1$ we have $\lambda^\nu \equiv \lambda_1 \pmod{p}$ where λ_1 is also a primitive root of p, whence $\alpha_r^\nu \equiv \lambda^{2\nu r} \equiv \lambda_1^{2r} \equiv \alpha'_r$, a quadratic residue incongruent to quadratic residue α'_s where α_r is incongruent to α_s.

Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.

(Von Herrn *Paul Stäckel* in Halle a. S.)

Das einfachste Beispiel einer ***analytischen Function mit beschränktem Existenzbereiche*** dürfte wohl die Function $\varphi(z)$ sein, welche durch die innerhalb des Kreises $|z|=1$ convergente Potenzreihe

$$1+z^a+z^{a^2}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{a^n}$$

definirt wird, wobei a eine positive ganze Zahl grösser als Eins bedeutet. Denn da der absolute Werth von $\varphi(z)$ bei Annäherung an die Stelle $z=1$ unbeschränkt wächst, so folgt aus der Identität:

$$\varphi(z^{a^n}) = \varphi(z)-z-z^a-z^{a^2}-\cdots-z^{a^n},$$

dass dasselbe für die Annäherung an alle Stellen gilt, welche durch die Gleichungen:

$$z^{a^n} = 1 \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

definirt werden. Diese Stellen aber erfüllen überalldicht die Peripherie des Kreises $|z|=1$. Uebrigens ist diese Eigenschaft der Function $\varphi(z)$, welche grosse Aehnlichkeit mit der von Herrn *Weierstrass* zu demselben Zwecke herangezogenen Function

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n}$$

besitzt, bereits von den Herren *Lerch* und *Hadamard* gefunden worden, deren Betrachtungen jedoch nicht den elementaren Charakter des hier mitgetheilten Beweises besitzen.

Bedeutet nunmehr $f(z)$ irgend eine eindeutige analytische Function, welche durch die innerhalb des Kreises $|z|=1$ convergente Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

dargestellt wird und sich nicht über diesen Kreis hinaus fortsetzen lässt, und wird um eine beliebige Stelle a_1 der z-Ebene der Kreis mit dem Radius

r_1 beschrieben, so ist

$$f\left(\frac{r_1}{z-a_1}\right)$$

eine eindeutige analytische Function von z, welche nur ausserhalb dieses Kreises existirt. Beschreibt man weiter um m beliebige Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die Kreise mit den Radien $r_1, r_2, \ldots, r_m$, so erkennt man sofort, dass der Ausdruck

$$\sum_{\mu=1}^{m} \varepsilon_\mu f\left(\frac{r_\mu}{z-a_\mu}\right),$$

in welchem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ beliebige Constanten bedeuten, in der Umgebung jeder Stelle z_0, welche keinem der m Kreise angehört, in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z-z_0)$ entwickelt werden kann und dass keine dieser Potenzreihen sich in das Innere eines jener Kreise fortsetzen lässt. Der betrachtete Ausdruck stellt also soviel eindeutige monogene analytische Functionen dar, als die Anzahl der zusammenhängenden Gebiete beträgt, aus denen der Bereich der z-Ebene ausserhalb der m Kreise besteht. Man kann daher durch geeignete Wahl dieser Kreise bewirken, dass die unendliche Summe *rationaler* Functionen von z:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} \varepsilon_\mu c_n \left(\frac{r_\mu}{z-a_\mu}\right)^n$$

eine vorgeschriebene Anzahl analytischer Functionen gleichzeitig darstellt.

Man darf sogar die Anzahl der Kreise unbeschränkt wachsen lassen, wenn man nur für die Convergenz der so entstehenden Summe:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon_\mu f\left(\frac{r_\mu}{z-a_\mu}\right)$$

sorgt. Diese aber wird für alle Punkte des Gebietes $\mathfrak{A}$ ausserhalb der Kreise erreicht, wenn man die Constanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ der Bedingung

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |\varepsilon_\mu| = 1$$

unterwirft. Wird nunmehr durch beliebig viele, in sich zurücklaufende, sonst aber ganz willkürliche Curven ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{A}$ aus der z-Ebene ausgesondert, so kann man den übrig bleibenden Theil $\mathfrak{J}$ dieser Ebene stets so mit Kreisen bedecken, dass jeder Punkt von $\mathfrak{J}$ mindestens einer, höchstens aber einer endlichen Anzahl der Kreisflächen angehört, während kein Punkt von $\mathfrak{A}$ im Inneren eines der Kreise liegt; hierzu wird im allgemeinen ein Grenzverfahren nöthig sein. Bildet man jetzt für diese Kreise den Ausdruck



$$F(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon_\mu f\left(\frac{r_\mu}{(z-a_\mu)}\right),$$

so überzeugt man sich leicht, dass er eine eindeutige analytische Function von z darstellt, deren Existenzbereich genau der gegebene Bereich $\mathfrak{A}$ ist. Hiermit aber ist der zuerst von Herrn *Weierstrass* ausgesprochene, dann von Herrn *Mittag-Leffler* bewiesene Satz in einfacher Weise hergeleitet, dass zu jedem solchen Bereiche $\mathfrak{A}$ eindeutige analytische Functionen von z gehören, deren Existenzbereich genau $\mathfrak{A}$ ist, ein Satz, dessen Richtigkeit später auch Herr *Poincaré* durch Betrachtung von Ausdrücken der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z-a_n}$$

dargethan hat, in denen a_n und c_n Constanten bedeuten.

Das soeben auseinandergesetzte Beweisverfahren leistet aber noch mehr. Es giebt bekanntlich eindeutige analytische Functionen mit beschränktem Existenzbereiche, deren absoluter Betrag für alle Stellen dieses Bereiches eine endliche obere Grenze besitzt. Eine solche Function ergiebt sich z. B. sofort durch Integration aus der oben benutzten Function $\varphi(z)$, und man erkennt so, dass die eindeutige analytische Function

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{a^n}}{a^n}$$

nur innerhalb des Kreises $|z| = 1$ existirt und dass stets

$$|\psi(z)| \leqq \frac{1}{a-1}$$

ist. Bildet man aber unter den alten Voraussetzungen über die Grössen ε_μ, r_n und a_n den Ausdruck:

$$\Psi(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon_\mu \psi\left(\frac{r_n}{z-a_n}\right),$$

so ist klar, dass er eine eindeutige analytische Function von z darstellt, deren Existenzbereich der gegebene Bereich $\mathfrak{A}$ ist, und dass für den ganzen Bereich $\mathfrak{A}$ die Ungleichheit

$$|\Psi(z)| \leqq \frac{1}{a-1}$$

gilt. Es giebt also für jeden Bereich $\mathfrak{A}$ der oben definirten Art auch eindeutige analytische Functionen von z, deren Existenzbereich genau $\mathfrak{A}$ ist und deren absoluter Betrag für alle Stellen dieses Bereiches eine endliche obere Grenze besitzt.

Die Differentialbeziehungen für die eindeutigen doppeltperiodischen Functionen zweiter bzw. dritter Art.

(Von Herrn *Eugen Jahnke.*)

Zur Aufstellung der Differentialbeziehungen für die *Hermite*schen doppeltperiodischen Functionen zweiter bzw. dritter Art sollen im Folgenden drei Wege eingeschlagen werden.

Bei dem ersten Wege benutze ich einmal die von *Liouville* für die doppeltperiodischen Functionen gegebene Darstellung, andererseits eine noch nicht bekannte Form für die Differentialgleichung, welcher jede eindeutige doppeltperiodische Function genügen muss. So gelange ich zu einer unendlichen Folge homogener Differentialgleichungen νter Ordnung und νten Grades ($\nu = 1, 2, \ldots$), die sich nach einem angegebenen Verfahren in expliciter Form aufstellen lassen. Dieser Weg hat den Vortheil, dass er die charakterisirte Klasse von Differentialbeziehungen nicht bloss für die Functionen zweiter, sondern auch für die Functionen dritter Art mit einem Schlage liefert. Die hierbei anzustellenden Untersuchungen bilden zugleich eine neue Begründung und Erweiterung der bezüglichen von Herrn *Krause* auf anderem Wege gewonnenen Resultate.

Will man aber *sämmtliche* Differentialgleichungen aufstellen und ausserdem Bedingungsgleichungen vermeiden, so muss man von Identitäten ausgehen. Während der zweite Weg einfache Identitäten, die aus der Definition der Functionen zweiter bzw. dritter Art hervorgehen, zum Ausgangspunkte nimmt, — ein Weg, den schon Herr *Fuchs* und *Halphen* in gewissen Sonderfällen eingeschlagen haben —, beruht der dritte Weg auf dem von Herrn *Caspary* entdeckten Zusammenhange der Functionen zweiter Art mit den *Elementen eines Orthogonalsystemes.*

Der Gang der Untersuchung ist kurz der folgende.

In No. I wird die *Briot-* und *Bouquet*sche Differentialgleichung

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^m + f_1(w)\left(\frac{dw}{du}\right)^{m-1} + \cdots + f_m(w) = 0 \tag{1.}$$

in eine neue Form gebracht, d. i. durch eine Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades mit doppeltperiodischen Coefficienten ersetzt und hieraus, in No. II, eine unendliche Folge homogener Differentialgleichungen νter Ordnung und νten Grades ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) für die Functionen zweiter bzw. dritter Art abgeleitet. Die *Liouville*sche Darstellung der doppeltperiodischen Functionen führt zu einer zweiten unendlichen Folge einfacherer Differentialgleichungen derselben Art. Die aus der Doppelperiodicität resultirenden Bedingungsgleichungen werden für die einfachsten der genannten Differentialbeziehungen genauer untersucht und letztere in expliciter Form dargestellt. (No. III, IV, V.) Dabei bleibt, wegen der Eindeutigkeit der Functionen zweiter bzw. dritter Art, noch eine Bedingung für die Residuen der diesen *zugehörigen* doppeltperiodischen Function zu erfüllen, welche zur Aufstellung *relativer Invarianten* für die in Rede stehenden Differentialgleichungen führt. (No. VI.) Zum Schluss derselben No. werden die Bedingungen zusammengefasst, welche nothwendig und hinreichend sind, damit eine vorgelegte Function eine eindeutige *Function zweiter bzw. dritter Art vom Grade M* darstelle.

Der zweite Theil beschäftigt sich mit den linearen Differentialgleichungen der Functionen zweiter Art. Zunächst werden für $\nu = 2, 3, 4$ die binomischen linearen Differentialgleichungen allgemein und für den besonderen Fall aufgestellt, dass sie zur *Klasse der Hermiteschen Differentialgleichungen* gehören. Dabei wird auf die bezüglichen *Fuchs*schen Untersuchungen eingegangen (No. VII.) Die folgende No. bringt die allgemeinen linearen Differentialgleichungen für $\nu = 2, 3$ zunächst in dem allgemeinen, sodann wieder in dem besonderen Falle, wo sie zur *Klasse der Hermiteschen Differentialgleichungen* gehören. Dabei ergiebt sich ein bemerkenswerthes Resultat betreffs ihrer *Typen*. Die ersten Beispiele einer *Hermite*schen Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Integralfunction eine Function zweiter Art vom ersten Grade darstellt, rühren, das eine von Herrn *Picard,* das andere von Herrn *Mittag-Leffler* her. Unsere Methode führt zunächst zu scheinbar speciellen Fällen dieser beiden *Typen*; doch gelingt der Nachweis, dass die Formen, welche unsere Methode liefert, schon die allgemeinen sind.

Ausserdem zeigt sich, dass aus einer Form unter Benutzung von Differentialrelationen niedrigerer Ordnung zahlreiche neue Formen fliessen.

Der dritte Theil stützt sich auf Untersuchungen von Herrn *Caspary,* welche die Darstellung der *Elemente eines Orthogonalsystemes* mittelst der Sigmafunctionen einer Variablen betreffen, und führt zur Aufstellung der allgemeinen *Differentialidentitäten* erster, zweiter, dritter ... Ordnung, denen die genannten Elemente genügen. (No. IX.) Hieraus folgen unmittelbar die Systeme partieller Differentialgleichungen erster, zweiter, dritter, ... Ordnung für die *Casparyschen Elementarfunctionen zweiter Art,* deren Erweiterung auf allgemeine Functionen zweiter Art kurz angedeutet wird. (No. X.) Im Falle *eines* Argumentes wird die *Hermite*sche Differentialgleichung $n$ter Ordnung, deren Integralfunction eine Function zweiter Art vom ersten Grade ist, explicite aufgestellt. Die für $n = 4$ bzw. $n = 5$ zuerst von Herrn *Mittag-Leffler* bzw. Herrn *Brioschi* gegebenen Beispiele erweisen sich als Specialfälle.

Es sei mir zum Schlusse gestattet, Herrn *F. Caspary* meinen besten Dank für die mannigfachen Anregungen und Rathschläge auszusprechen, welche er mir bei Anstellung vorliegender Untersuchungen hat zu Theil werden lassen.

Erster Theil.

I.

Transformation der *Briot-* und *Bouquet*schen Differentialgleichung.

Es besteht zwischen einer doppeltperiodischen Function $m$ten Grades w und einer solchen zweiten Grades t, die dasselbe primitive Periodenpaar haben, eine algebraische Gleichung; dieselbe steigt in w zum zweiten, in t zum $m$ten Grade auf, ist in Bezug auf beide Grössen irreductibel und besitzt die Form

$$(2.)\qquad L_0(t)w^2+2L_1(t)w+L_2(t) = 0$$

oder

$$(2^*.)\qquad M_0(w)t^m+\cdots+M_m(w) = 0.$$

Die $L_i(t)$ und $M_k(w)$ stellen ganze rationale Functionen ohne gemeinsamen Factor dar, die den Grad 2 bzw. m nicht übersteigen dürfen; andererseits muss wenigstens einer der Coefficienten L_i in t den $m$ten und einer der Coefficienten M_k in w den zweiten Grad wirklich erreichen. Als Function

von t muss w die Gestalt haben

$$w = P_0(t)\sqrt{R(t)}+P_1(t),$$

wo $R(t)$ eine ganze rationale Function vierten Grades und $P_0(t)$, $P_1(t)$ rationale Functionen des Argumentes sind. Demnach ergiebt sich durch Vergleichung

$$\text{(L.)} \qquad L_1^2(t)-L_0(t)L_2(t) = S^2(t)R(t),$$

$S(t)$ eine ganze rationale Function höchstens vom Grade $m-2$. Doch können wir annehmen, dass $S(t)$ den genannten Grad wirklich erreicht, da dieser Voraussetzung stets mittelst einer linearen gebrochenen Substitution Genüge geschehen kann. Somit stellt sich die doppeltperiodische Function w gemäss (2.) und (L.) in der Form

$$\text{(3.)} \qquad L_0(t)w+L_1(t)+t'S(t) = 0$$

dar, wo

$$t'^2 = R(t).$$

Wird hiernach die Identität

$$L_0(t)w^2+2L_1(t)w+L_2(t) = M_0(w)t^m+\cdots+M_m(w)$$

nach w differentiirt, so wird das vollständige Differential des Polynoms $M(t, w)$ in (2*.) mit Rücksicht auf (L.) und mit einer leicht verständlichen Abkürzung

$$\frac{dw}{M'(t)}+\frac{dt}{S(t)\sqrt{R(t)}} = 0,$$

woraus wegen

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = R(t)$$

die Differentialgleichung hervorgeht

$$\text{(4.)} \qquad S(t)\frac{dw}{du}+L_0'(t)w^2+2L_1'(t)w+L_2'(t) = 0,$$

welcher jede eindeutige doppeltperiodische Function $m$ten Grades zu genügen hat. Dabei stellen die Ableitungen $L_i'(t)$ doppeltperiodische Functionen $2(m-1)$-ten und der Coefficient $S(t)$ eine solche $2(m-2)$-ten Grades dar.

Gleichung (3.) oder (4.) liefert zugleich in Verbindung mit der Relation (L.) das System von nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Differentialgleichung (1.) durch Functionen der genannten

Art befriedigt wird*). Wird also (3.) oder (4.) als Transformation von (1.) aufgefasst, so bildet einzig und allein Formel (L.) die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit die Integrale von (3.) oder (4.) Functionen der verlangten Art seien.

Der Differentialgleichung (4.) mit der absoluten Invariante $\frac{L_0'(t)}{S(t)}$ lässt sich noch die Form geben

$$(4^*.) \qquad S(t)\frac{dw}{du}+L_0'(t)w^2-S(t)L_1''(t)-L_1'^2(t)+L_2'(t) \;=\; 0,$$

wo das Glied mit der ersten Potenz der abhängigen Variablen verschwunden ist. Führt man t als unabhängige Veränderliche ein, so wird (4.) zu

$$S^2(t)R(t)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 \;=\; [L_0'(t)w^2+L_1'(t)w+L_2'(t)]^2,$$

wodurch sich die Frage nach den doppeltperiodischen Integralfunctionen in die Frage nach den algebraischen umsetzt. In dem besonderen Falle, dass $R(t)$ ein Quadrat wird, stellt diese Gleichung nichts anderes als die *Riccati*sche Differentialgleichung dar**).

Für $m=2$, 3 führt Gleichung (3.) oder (4.) auf die binomischen und trinomischen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Herren *Briot* und *Bouquet* eingehend behandelt haben, d. h. wofür die genannten Herren einmal die Relationen, welche zufolge den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen doppeltperiodischen Integralfunction unter den Coefficienten der Differentialgleichungen bestehen müssen, explicite angegeben und andererseits die Integrale aufgestellt haben***). Dieselbe Aufgabe ist in der Inauguraldissertation des Verfassers für eine umfassendere Klasse von Differentialgleichungen behandelt†) nach einem Verfahren, das sich als Verallgemeinerung einer von Herrn *Weierstrass* in seinen Vorlesungen angewendeten Methode††) darstellt.

---

*) Vgl. *E. Jahnke* „Zur Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die unabhängige Veränderliche explicite nicht vorkommt, durch eindeutige doppeltperiodische Functionen". Halle 1889. S. 5 u. flg.

**) Vgl. *Appell*, Sur les invariants de quelques équations différentielles. *Liouvilles* Journal Bd. 5, S. 393.

***) *Briot* et *Bouquet*, Théorie des fonctions elliptiques. Paris 1875, S. 381, 387. Vgl. auch *E. Jahnke*, Zur Integration der binomischen Differentialgleichung 3ter Ordnung, Zeitschrift f. M. u. Ph., Bd. 34, S. 376.

†) l. c.

††) Vgl. *Enneper*, Elliptische Functionen, 2. Aufl. von *F. Müller*, S. 27 u. flg.

II.

Differentialgleichungen der Functionen zweiter bzw. dritter Art.

Elliptische Function zweiter bzw. dritter Art wird nach Herrn *Hermite* jede Function genannt, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function hat und deren erste bzw. zweite logarithmische Ableitung doppeltperiodisch ist*). Setzt man daher

$$(5.)\qquad w_\nu = \frac{d^\nu \log x}{du^\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

so stellt x eine Function zweiter bzw. dritter Art dar, je nachdem die erste bzw. zweite logarithmische Ableitung doppeltperiodisch ist. Die Substitution (5.) führt (3.) in

$$(\text{A.})\qquad L_{0\nu}(t)\frac{d^\nu \log x}{du^\nu} + L_{1\nu}(t) + t' S_\nu(t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und (4.) in

$$(\text{B.})\quad S_\nu(t)\frac{d^{\nu+1}\log x}{du^{\nu+1}} + L'_{0\nu}(t)\left(\frac{d^\nu \log x}{du^\nu}\right)^2 + 2L'_{1\nu}(t)\frac{d^\nu \log x}{du^\nu} + L'_{2\nu}(t) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

über. Nun bezeichnet w_ν die allgemeinste eindeutige doppeltperiodische Function (erster Art) und jede Function zweiter bzw. dritter Art ist in der Form $e^{\int\int\cdots\int w_\nu du}$ darstellbar, falls nur die Bedingung erfüllt ist, dass die erste bzw. zweite logarithmische Ableitung dieser Exponentialfunction doppeltperiodisch ist. Demnach:

Die allgemeinste Function zweiter bzw. dritter Art genügt homogenen Differentialgleichungen erster, zweiter, dritter, bzw. zweiter, dritter, vierter u. s. w. Ordnung und ersten, zweiten, dritten, bzw. zweiten, dritten, vierten u. s. w. Grades der Form (A.) oder (B.) mit doppeltperiodischen Coefficienten, die der Bedingung (L.) unterworfen sind.

Doch ist zu bemerken, dass die in (A.) und (B.) aufgestellten Differentialgleichungen, wie aus der Herleitung ersichtlich, auch für solche Functionen zweiter bzw. dritter Art gelten, welche im Endlichen wesentlich singuläre Stellen besitzen**).

---

*) Vgl. auch *Frobenius,* Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art, dieses Journal Bd. 93.

**) Vgl. *P. Benoit*, Ueber Differentialgleichungen, welche durch doppeltperiodische Functionen zweiter Gattung erfüllt werden. Wiss. Beil. z. Progr. d. Dorotheenstädt. Realgymn. z. Berlin 1891, und *Elliot,* Sur une équation linéaire du second degré à coefficients doublement périodiques. Acta mathematica Bd. 2, 1883.

III.

Die Coefficienten $L(t)$ und $S(t)$.

Wird die *Hermite*sche Definition der Function zweiter und dritter Art zu Grunde gelegt, so unterliegen die Ordnungszahlen der Unendlichkeitsstellen von x weiter keiner Beschränkung, dagegen kann $\frac{d^\nu \log x}{du^\nu}$ oder w_ν nur lauter ν-fache Unendlichkeitsstellen haben. Diese bestimmen sich gemäss Formel (2.) aus

$$L_{0\nu}(t) = 0.$$

Wird jetzt

$$t = \wp u, \quad t_k = \wp u_k$$

gesetzt, so muss das Polynom $L_{0\nu}(t)$ als Function von u lauter ν-fache Nullstellen besitzen, es muss also sein

$$L_{0\nu}(t) = \prod_{k=1}^{m}(t-t_k)^\nu. \tag{6.}$$

Hiernach können wir mit Herrn *Hermite**) setzen

$$w_\nu = \alpha - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \wp^{(\nu-2)}(u-u_k), \qquad \left(\begin{smallmatrix} \nu = 1,\,2,\,\ldots; \\ \text{bzw. } \nu = 2,\,3,\,\ldots \end{smallmatrix} \quad \wp^{(-1)} = -\frac{\sigma'}{\sigma}\right), \tag{7.}$$

dabei bezeichnet α eine Constante, die für die Functionen zweiter bzw. dritter Art von $\nu = 2$ bzw. von $\nu = 3$ ab gleich Null ist; die Residuen α_k unterliegen bekanntlich nur für $\nu = 1$ einer Bedingung, auf die wir weiter unten zurückkommen werden. Das Summenzeichen bezieht sich auf alle Unendlichkeitsstellen von w_ν oder auf alle Null- und Unendlichkeitsstellen von x, die im Periodenparallelogramm enthalten sind.

Mit Hülfe des Additionstheoremes der Function $\wp u$**) geht Formel (7.) über in

$$w_\nu = \alpha - \wp^{(\nu-2)} u \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_k + \tfrac{1}{2} \sum_{h=1}^{\mu} \alpha_k \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} \left(\frac{\wp' u + \wp' u_k}{\wp u - \wp u_k}\right).\text{***)} \qquad (\nu > 1)$$

Vergleicht man den nach Ausführung der Differentiation für w_ν sich ergebenden Ausdruck mit Formel (3.), so gewinnt man eine Darstellung der

---

*) Vgl. auch *Weierstrass-Schwarz*, Formeln und Lehrsätze z. G. d. ellipt. F. Seite 20, (3.).

**) Vgl. *Weierstrass-Schwarz*, l. c. Seite 13, (1.).

***) Für $\nu = 1$ tritt wegen des Additionstheoremes von ζu noch das Glied $-\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \zeta u_k$ hinzu.

Functionen $L_{0\nu}(t)$, $L_{1\nu}(t)$, $L_{2\nu}(t)$ und $S_\nu(t)$ als ganze rationale Functionen von t, in deren Coefficienten die $2m+1$ Constanten α, α_k und t_k $(k=1,\dots,m)$ rational eingehen.

Wir werden im Folgenden diese Rechnung für die beiden einfachsten Fälle $\nu=1,\ 2$ durchführen.

IV.

Differentialgleichungen erster bzw. zweiter Ordnung für die Functionen zweiter Art.

Zwei der einfachsten Differentialbeziehungen niedrigster Ordnung, wodurch Functionen zweiter Art definirt werden*), ergeben sich aus (A.) und (B.) für $\nu=1$. Die erstere nimmt, wie man unmittelbar erkennen kann, die Gestalt an

$$(\mathrm{A}_2.)\qquad \frac{x'}{x}=a+\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\frac{t'+t'_k}{t-t_k},\quad a=\alpha-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\zeta u_k,\quad \sum_{k=1}^{m}\alpha_k=0,$$

wo die Bedingungsgleichung (L.) identisch erfüllt ist.

Um auch die andere Differentialgleichung in expliciter Form aufzustellen, geht man aus von den Darstellungen

$$\frac{L_{11}(t)}{L_{01}(t)}=-a-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k t'_k}{t-t_k},\qquad \frac{S_1(t)}{L_{01}(t)}=-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{t-t_k}$$

und drückt $L_{21}(t)$ mit Hülfe der *Lagrange*schen Interpolationsformel direct durch die Werthe aus, welche diese Function an den Stellen $t=t_k$ annimmt, entweder nach Formel (L.) oder einfacher durch eine Betrachtung, wie sie *P. Günther* in seiner Notiz: „Zur Theorie der elliptischen Functionen"**) angestellt hat. Alsdann findet man durch Differentiation und leichte Transformation

$$(\mathrm{B}_2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{x''}{x}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{t-t_k}-\Big(\frac{x'}{x}\Big)^2\sum_{k=1}^{m}\frac{2+\alpha_k}{t-t_k}+2\,\frac{x'}{x}\Big[2a\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{t-t_k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k t'_k}{(t-t_k)(t-t_i)}\Big]\\ =2a^2\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{t-t_k}-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\frac{2at'_k-\alpha_k t''_k}{(t-t_k)(t-t_i)}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k t'_k}{(t-t_k)(t-t_i)}\,\Sigma\alpha_l\frac{t'_k-t'_l}{t_k-t_l},\\ \Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\alpha_k=0;\ \ i,\ k,\ l=1,\ 2,\ \dots,\ m;\ \ i\neq k\neq l\Big). \end{cases}$$

In $(\mathrm{A}_2.)$ wie $(\mathrm{B}_2.)$ ist noch die Bedingung (R.) (No. VI) für die Residuen α_k einzuführen.

---

*) Vgl. die Form der Differentialgleichungen des Rotationsproblems bei Herrn *Hermite,* Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris 1885. S. 31, 36.

**) Dieses Journal Band 108, S. 261.

V.

Differentialgleichungen zweiter bzw. dritter Ordnung für die Functionen dritter Art. Die *Krause*schen Differentialgleichungen.

Zwei der einfachsten Differentialbeziehungen niedrigster Ordnung, wodurch Functionen dritter Art definirt werden, ergeben sich aus (A.) und (B.) für $\nu = 2$. Benutzt man die Darstellungen

$$\frac{L_{12}(t)}{L_{02}(t)} = -\alpha + t\sum_{k=1}^{m}\alpha_k - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{t-t_k}\left(t'' - \frac{t'^2}{t-t_k}\right), \quad \frac{S_2(t)}{L_{02}(t)} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k t'_k}{(t-t_k)^2},$$

so verwandelt sich die eine Differentialgleichung in

$$(A_3.)\quad \frac{x''}{x} - \frac{x'^2}{x^2} = \alpha - t\sum_{k=1}^{m}\alpha_k + \tfrac{1}{2}t''\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{t-t_k} - \tfrac{1}{2}t'\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\frac{t'+t'_k}{(t-t_k)^2},$$

wo der Bedingung (L.) identisch genügt wird, aber noch die Bedingung (R.) (No. VI) einzuführen ist.

Auf analogem Wege wie in voriger No. lässt sich auch die aus (B.) folgende Differentialgleichung für die Functionen dritter Art in expliciter Form aufstellen.

In den für die Functionen zweiter bzw. dritter Art geltenden Differentialgleichungen (A.), die zu den Differentialgleichungen (A_2.) bzw. (A_3.) geführt haben, sind die bezüglichen von Herrn *Krause**) abgeleiteten Differentialbeziehungen als Specialfälle enthalten**). Die Differentialbeziehungen ergeben sich daselbst als Eliminationsresultat aus drei Differentialrelationen, das indessen nicht explicite angegeben wird. Hieraus erhellt, dass die von Herrn *Krause* angewendete Methode von der unserigen durchaus verschieden ist.

VI.

Ein allgemeines Theorem für die Functionen zweiter bzw. dritter Art.

Aus (7.) in Verbindung mit (5.) folgt

$$x = e^{a_\nu u^\nu + \cdots + a_0}\prod_{k=1}^{m}\sigma^{\alpha_k}(u-u_k);$$

und man überzeugt sich leicht, dass für die Functionen zweiter bzw. dritter Art $a_\lambda = 0$ sein muss, wo $\lambda > 1$ bzw. > 2. Demnach ergiebt sich die

*) Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der doppeltperiodischen Functionen dritter Art. Leipziger Berichte 41.

**) Vgl. noch die bezüglichen Bemerkungen auf S. 275.

Function zweiter Art

$$x = Ce^{a_1 u} \prod_{k=1}^{m} \sigma^{\alpha_k}(u-u_k), \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 0, \quad a_1 = a + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \zeta u_k,$$

und die Function dritter Art

$$x = Ce^{\frac{1}{2}a_2 u^2 + a_1 u} \prod_{k=1}^{m} \sigma^{\alpha_k}(u-u_k), \quad a_2 = a + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \wp u_k.$$

Dabei ist a der Werth, den w_1 bzw. w_2 für $u = 0$ annimmt.

Aus der Eindeutigkeitsbedingung für x folgt weiter, dass die α_k ganze Zahlen sein müssen, positiv oder negativ, je nachdem das zugehörige u_k eine Null- oder Unendlichkeitsstelle darstellt*). Nun lassen sich die Residuen durch die Coefficienten der zugehörigen Differentialgleichungen darstellen, also muss der absolute Werth

$$(\text{R.}) \qquad |\alpha_k| = \frac{2\nu S_\nu(t_k)}{t_k'^{\nu-1} L_{0\nu}^{(\nu)}(t_k)} = g.Z \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

sein. Da die α_k für die Differentialgleichungen (A.) und (B.) Invariantencharakter haben, so kommt demnach diese Eigenschaft auch den auf der rechten Seite von (R.) auftretenden Coefficientenverknüpfungen zu.

Wir wollen noch der bequemeren Ausdrucksweise halber folgende Bezeichnung einführen: Eine Function zweiter bzw. dritter Art soll vom Grade M heissen, wenn die ihr zugehörige doppeltperiodische Function vom Grade m ist und M die (absolut genommene) Summe der negativen Residuen für die letztgenannte Function bezeichnet. Sind m_1 dieser Residuen negativ, so ist demnach

$$(9.) \qquad M = \sum_{k=1}^{m_1} |\alpha_k| = 2 \sum_{k=1}^{m_1} \left| \frac{\nu S_\nu(t_k)}{t_k'^{\nu-1} L_{0\nu}^{(\nu)}(t_k)} \right|.$$

Hiernach können wir sagen:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine vorgelegte Function eine eindeutige *Function zweiter bzw. dritter Art vom Grade M* sei, sind:

1) Ihre νten Ableitungen müssen von $\nu = 1$ bzw. $\nu = 2$ ab eindeutige doppeltperiodische Functionen $m.\nu$ten Grades darstellen.

2) Diese doppeltperiodischen Functionen dürfen nur ν-fache Unendlichkeitsstellen zulassen.

---

*) Vgl. *Fuchs,* Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen etc., dieses Journal Bd. 81, und Sur les équations linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques, *Liouvilles* Journal (3) IV.

3) Die Residuen der doppeltperiodischen Functionen müssen ganzzahlig sein.

Alsdann ist M gleich der (absolut) genommenen Summe der negativen Residuen.

Hiermit ist zugleich ein für jede eindeutige Function zweiter bzw. dritter Art bestehendes allgemeines Theorem ausgesprochen, von dem ein specieller Fall den Inhalt des folgenden von Herrn *Krause**) aufgestellten Satzes bildet: Sämmtliche Differentialquotienten einer *unipolaren* Function zweiter Art $F(v)$ vom Grade n, die als Product von n Primfunctionen darstellbar ist, lassen sich als Product von $F(v)$ und einer rationalen Function von $sn(v+a)$ und $cn(v+a)dn(v+a)$ mit einem gemeinsamen Nenner ausdrücken.

Zweiter Theil.

VII.

Die binomischen Differentialgleichungen für die Functionen zweiter Art. Die Klasse der *Hermite*schen Differentialgleichungen.

Aus (5.) und (7.) folgt

$$\frac{d^\nu \log x}{du^\nu} = w_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

oder

$$(\text{F.}) \qquad \begin{cases} \dfrac{x''}{x} = w_2 + w_1^2, \\ \dfrac{x'''}{x} = w_3 + 3w_1 w_2 + w_1^3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Wird hier die Darstellung der w_ν aus (7.) eingeführt, wobei die α_k ganzzahlig zu nehmen sind, so giebt (F.) eine unendliche Folge linearer Differentialgleichungen. Man entwickle nun $w_1, w_2, w_3, \ldots$ in der Umgebung von u_i und stelle die Potenzen und Producte in bekannter Weise**) als doppeltperiodische Functionen dar, dann ergiebt sich

$$(\text{F}_2.) \qquad \frac{x''}{x} = \varepsilon + 2\sum_{k=1}^{m} \alpha_k R_k \zeta(u-u_k) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(\alpha_k - 1)\wp(u-u_k),$$

*) Zur Theorie der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art. Leipz. Berichte 41.

**) Vgl. *Weierstrass-Schwarz*, F. u. L. S. 20 (16.).

$$(F_3.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x'''}{x} &= \varepsilon' + 3\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(R_k^2+\alpha_k R_k')\zeta(u-u_k) + 3\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(\alpha_k-1)R_k\wp(u-u_k) \\ &\qquad -\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(\alpha_k-1)(\alpha_k-2)\wp'(u-u_k), \end{aligned}\right.$$

$$(F_4.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x^{IV}}{x} &= \varepsilon'' + 4\Sigma\alpha_k[R_k^3+3R_kR_k'+\tfrac{1}{2}(1+\alpha_k^2)R_k'']\zeta(u-u_k) \\ &\quad +2\Sigma\alpha_k(\alpha_k-1)[3R_k^2+(2\alpha_k-1)R_k']\wp(u-u_k) \\ &\quad -2\Sigma\alpha_k(\alpha_k-1)(\alpha_k-2)R_k\wp'(u-u_k) \\ &\quad +\tfrac{1}{6}\Sigma\alpha_k(\alpha_k-1)(\alpha_k-2)(\alpha_k-3)\wp''(u-u_k), \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \end{aligned}\right.$$

wo die ganzen Zahlen α_k und die Constanten

$$R_i = a + \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\zeta(u_i-u_k),$$

$$R_i^{(r)} = -\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\wp^{(r-1)}(u_i-u_k) \qquad \left(\begin{smallmatrix} i,\,k\,=\,1,\,2,\,\ldots,\,m;\ i\,\gtrless\,k \\ r\,=\,1,\,2,\,\ldots \end{smallmatrix}\right)$$

noch folgenden Bedingungsgleichungen genügen müssen

$$(F'.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m}\alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{m}\alpha_k R_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{m}\alpha_k(R_k^2+\alpha_k R_k') = 0, \\ &\sum_{k=1}^{m}\alpha_k R_k R_k' = 0, \quad \sum_{k=1}^{m}\alpha_k R_k'' = 0, \quad \ldots \end{aligned}\right.$$

Die Klasse der *Hermite*schen *Differentialgleichungen* *) bietet die charakteristische Eigenschaft, dass die singulären Stellen derselben Pole ihrer Integrale bilden **). Wird diese Bedingung in $(F_2.)$ eingeführt, so muss für die Nullstellen von x

$$\alpha_k = 1, \quad R_k = 0 \qquad (k = m_1+1, \ldots, m)$$

sein, so dass

$$x = C\,\frac{\prod\limits_{k=m_1+1}^{m}\sigma(u-u_k)}{\prod\limits_{k=1}^{m_1}\sigma(u-u_k)^{-\alpha_k}}\,e^{au}, \qquad \sum_{k=1}^{m_1}\alpha_k = m_1 - m$$

wird. Für diesen ausgezeichneten Fall ist $(F_2.)$ schon von Herrn *Fuchs* ***)

---

*) Vgl. *Mittag-Leffler,* Ueber die Integration der *Hermite*schen Differentialgleichungen der dritten und vierten Ordnung etc. Annali di matematica (2) XI.

**) Vgl. *Fuchs,* dieses Journal Bd. 66.

***) Sur les équations linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques, *Liouvilles* Journal (3.) IV.

aufgestellt worden. Durch weitere Specialisirung ergiebt sich hieraus die *Lamé-Hermite*sche *Differentialgleichung zweiter Ordnung**).

In der That, die Function zweiter Art werde als unipolar vorausgesetzt, dann wird sie vom $(m-1)$ten Grade, weil

$$\alpha_1 = -(m-1), \quad \alpha_2 = 1, \quad \dots, \quad \alpha_m = 1;$$

da ferner

$$(10.) \qquad R_2 = 0, \quad \dots, \quad R_m = 0,$$

ist auch

$$R_1 = 0, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = \sum_{k=2}^{m} \zeta(u_k - u_1).$$

Folglich nach einer leichten Transformation

$$\frac{x''}{x} = \varepsilon + m(m-1)\wp u.$$

ε erscheint hier als die Constante in der Entwickelung von $\frac{x''}{x}$ oder $w_1^2 + w_2$ nach Potenzen von u, nämlich $= R_1^2 + (2\alpha_1 + 1)R_1'$. Demnach ergiebt sich**)

$$(11.) \qquad \frac{x''}{x} = m(m-1)\wp u + (2m-3)\sum_{k=2}^{m} \wp u_k, \quad x = \prod_{k=2}^{m} \frac{\sigma(u-u_k)}{\sigma u_k \sigma u} e^{u\zeta u_k}.$$

Dabei bestimmen sich die Constanten u_k $(k = 2, \dots, m)$ aus den $m-1$ Bedingungsgleichungen (10.), welche mit den von *Halphen****) untersuchten identisch sind.

Damit auch $(F_3.)$ zur Klasse der *Hermite*schen *Differentialgleichungen* gehöre, muss entweder

$$\alpha_k = 1, \quad R_k^2 + \alpha_k R_k' = 0$$

oder $\qquad\qquad (k = m_1+1, \dots, m)$

$$\alpha_k = 2, \quad R_k = 0, \quad R_k' = 0$$

sein, so dass unter gewissen Bedingungen (vgl. (16.)) zwei *Lamé-Hermite*sche Differentialgleichungen dritter Ordnung vorhanden sind.

Wird auch hier x als unipolar vorausgesetzt, so findet man in dem

---

*) Vgl. wegen dieser Bezeichnung *E. Haentzschel*, „Studien über die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen". Berlin, Georg Reimer, 1893. S. 49.

**) Vgl. *Halphen*, a. a. O. S. 495 flg.

***) a. a. O. S. 495 flg.

ersteren Falle

$$(12.)\quad\begin{cases}\dfrac{x'''}{x} = \frac{1}{2}(m-1)m(m+1)\wp' u+3m(m-1)R_1\wp u-2R_1\sum\limits_{k=2}^{m}\wp u_k \\ \qquad\qquad +\frac{1}{2}(3m^2-9m+8)\sum\limits_{k=2}^{m}\wp' u_k,\quad R_1=\alpha-\sum\limits_{k=2}^{m}\zeta u_k, \\ x = e^{u(\lambda+\Sigma\zeta u_k)}\prod\limits_{k=2}^{m}\dfrac{\sigma(u-u_k)}{\sigma u_k\sigma u},\end{cases}$$

wo sich λ aus

$$\lambda^2+R_1' = 0 \quad \text{d. h.} \quad \lambda^2 = \sum_{k=2}^{m}\wp u_k$$

und die u_k $(k=2,\dots,m)$ aus den $m-1$ Bedingungsgleichungen

$$R_2^2+R_2' = 0,\quad \dots,\quad R_m^2+R_m' = 0.$$

bestimmen.

Die andere Form von (F_3.), die, wie man sich leicht überzeugt, nur vorhanden ist, wenn

$$(13.)\qquad 2m_1 \geqq m,$$

liefert bei Voraussetzung der Unipolarität oder für $m=2$

$$(14.)\qquad \frac{x'''}{x} = 12\wp' u+8\wp' u_2,\quad x = \frac{\sigma^2(u-u_2)}{\sigma^2 u_2\sigma^2 u}e^{2u\zeta u_2}.$$

Die *Lamé-Hermite*sche Differentialgleichung dritter Ordnung von der Form (14.) steht somit zu der *Lamé-Hermite*schen zweiter Ordnung (11.) für $m=2$ in der Beziehung, dass ihr die Quadrate der Integrale der letzteren genügen.

Entsprechend lässt sich die Untersuchung von (F_4.) durchführen in dem Falle, dass auch sie zur Klasse der *Hermite*schen Differentialgleichungen gehört. Es existiren hier unter gewissen Bedingungen drei Gleichungen.

VIII.

Die allgemeinen linearen Differentialgleichungen für die Functionen zweiter Art. Die *Hermite*schen Differentialgleichungen.

Von den Differentialgleichungen (F.) vor. No. gelangt man in einfacher Weise zu den allgemeinen linearen Differentialgleichungen.

Durch Einführung einer Function $P(u)$ ergiebt sich nämlich zunächst

$$(P_2.)\qquad \frac{x''}{x}+2\frac{P'}{P}\frac{x'}{x} = w_2+w_1^2-\frac{P''}{P},$$

und das ist die allgemeinste Differentialbeziehung zweiter Ordnung, da be-

kanntlich alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im *Laguerre*schen Sinne*) zu derselben Klasse gehören. Dabei muss offenbar $d\log P(u)$ doppeltperiodisch sein von einem Grade $\leqq m$. Führt man noch für $w_2+w_1^2$ den in (F_2.) aufgestellten Ausdruck ein, so ergiebt sich in (P_2.) die allgemeinste *Picard*sche Differentialgleichung zweiter Ordnung, wovon specielle Fälle von den Herren *Hermite***), *Fuchs****), *Picard*†), *Darboux*††), *Gyldén*†††), *Elliot**†), *de Sparre***†) und *Krause****†) behandelt worden sind. (Vgl. auch ($\mathfrak{C}_2'$.), No. X.)

Ebenso gewinnt man aus der Differentialgleichung dritter Ordnung in (F.) durch Einführung von $P(u)$ und einer zweiten Function $Q(u)$ die allgemeinste *Picard*sche Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(P_3.)\quad \frac{x'''}{x}+2\frac{P'}{P}\frac{x''}{x}+\left[3\frac{P''}{P}-2\frac{P'^2}{P^2}+Q\right]\frac{x'}{x} = w_3+3w_1w_2+w_1^3-d\left(\frac{P''}{P}\right)+Qw_1,$$

wo $Q(u)$ offenbar doppeltperiodisch sein muss von einem Grade $\leqq 2m$.

Wir geben noch die Formen, welche (P_3.) für $P(u)=\text{const.}$ und für besondere Werthe von $Q(u)$ annimmt.

Es sei

$$\text{I.}\quad -Q(u) = \tfrac{3}{2}(w_2+w_1^2),$$

so wird

$$(P_3'.)\quad \begin{cases} \dfrac{x'''}{x}-\dfrac{3}{2}\dfrac{x'}{x}\left[\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(\alpha_k-1)\wp(u-u_k)+2\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_kR_k\zeta(u-u_k)+c\right] \\ = \tfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(\alpha_k-1)(\alpha_k+4)\wp'(u-u_k)-\tfrac{3}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(\alpha_k+1)R_k\wp(u-u_k) \\ \qquad -\tfrac{3}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(R_k^2+\alpha_kR_k')\zeta(u-u_k)+c''. \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad -Q(u) = 3(w_2+w_1^2),$$

so wird

$$(P_3''.)\quad \begin{cases} \dfrac{x'''}{x}-3\dfrac{x'}{x}\left[\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(\alpha_k-1)\wp(u-u_k)+2\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_kR_k\zeta(u-u_k)+c\right] \\ = \sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(\alpha_k^2-1)\wp'(u-u_k)-6\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k^2R_k\wp(u-u_k) \\ \qquad -6\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(R_k^2+\alpha_kR_k')\zeta(u-u_k)+c'. \end{cases}$$

---

*) Sur les équations différentielles linéaires du 3e ordre. C. R. 88.

**) Dieses Journal Bd. 89. Vgl. auch Annali di matematica (2.) IX und C. R. 89.

***) Nachrichten der Kgl. G. d. W. zu Göttingen 1878. Vgl. auch *Liouvilles* Journal (3.) IV.

†) C. R. 89. ††) C. R. 1882. †††) C. R. 90.

*†) Acta mathematica 2. **†) Acta mathematica 3. ***†) Leipz. Ber. 42, 1890.

$$\text{III.} \quad -Q(u) = 2w_2 + w_1^2,$$

so wird

$$(\text{P}_3'''.) \quad \begin{cases} \dfrac{x'''}{x} - \dfrac{x'}{x}\Big[\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k(\alpha_k-2)\wp(u-u_k) + 2\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k R_k \zeta(u-u_k) + c_1\Big] \\ = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k(\alpha_k-2)\wp'(u-u_k) - \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k R_k \wp(u-u_k). \end{cases}$$

Es werde nun wieder $(\text{P}_3.)$ als eine *Hermitesche Differentialgleichung* vorausgesetzt, dann ergeben sich durch ein Verfahren, wie es schon in der vor. No. angewendet worden ist, folgende Formen für die *Hermite*sche Differentialgleichung dritter Ordnung.

Aus $(\text{P}_3'.)$ folgt, da hier die eben aufgestellte Bedingung $m = 2$ verlangt:

$$(\text{M.}) \quad x''' - 3\wp u\, x' - \tfrac{1}{2}(3\wp' u - \wp' u_2)x = 0, \quad x = \frac{\sigma(u-u_2)}{\sigma u_2\, \sigma u} e^{-u\zeta u_2}.$$

Eine zweite Form fliesst aus $(\text{P}_3''.)$ oder aus folgender Ueberlegung. Da die Integralfunction bekannt ist, hat man nur die Relation

$$(\wp u - \wp u_2)x' = \tfrac{1}{2}(\wp' u + \wp' u_2)x$$

mit (M.) zu combiniren, um zu erhalten

$$(\text{P.}) \quad x''' - 3(2\wp u - \wp u_2)x' + 2\wp' u_2 x = 0, \quad x = \frac{\sigma(u-u_2)}{\sigma u_2 \sigma u} e^{-u\zeta u_2}.$$

(P.) ist der von Herrn *Picard**), (M.) der von Herrn *Mittag-Leffler***) gefundene „Typus"***) einer Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Integralfunction nur eine Unendlichkeitsstelle erster Ordnung besitzt — für den speciellen Fall, dass die bei Herrn *Picard* wie bei Herrn *Mittag-Leffler* auftretende Constante $\lambda = 0$ gesetzt wird.

In Wirklichkeit sind aber die von uns gefundenen Formen (P.) und (M.) allgemeine Formen einer *Hermite*schen Differentialgleichung dritter Ordnung. Man hat nur nöthig

$$x = y e^{-\lambda u}$$

einzuführen, um die Differentialgleichungen

$$(\mathfrak{P}.) \quad y''' - 3(2\wp u + \lambda^2 - \wp u_2)y' + 2(\lambda^3 - 3\lambda\wp u_2 + \wp' u_2)y = 0,$$

$$(\mathfrak{M}.) \quad y''' - 3(\wp u + \lambda^2)y' - (\tfrac{3}{2}\wp' u + 3\lambda\wp u - 2\lambda^3 + 3\lambda\wp u_2 - \tfrac{1}{2}\wp' u_2)y = 0$$

---

*) Dieses Journal Bd. 90, S. 290.

**) Annali di matematica (2.) XI.

***) Annali di matematica (2.) XI, S. 68.

in der Form zu erhalten, wie sie von den Herren *Picard* und *Mittag-Leffler* aufgestellt worden sind*).

Es leuchtet zugleich ein, dass sich auf demselben Wege wie (P.) aus (M.) abgeleitet wurde, noch ***zahlreiche neue*** Formen der *Hermite*schen Differentialgleichung dritter Ordnung ableiten lassen.

Endlich aus (P_3'''.) folgt**)

$$x''' - 4x'\left[m(m-1)\wp u + (2m-3)\sum_{k=2}^{m}\wp u_k\right] = 2m(m-1)x\wp' u, \quad x = \prod_{k=2}^{m}\frac{\sigma^2(u-u_k)}{\sigma^2 u_k \sigma^2 u}e^{2u\zeta u_k},$$

wo sich die u_k aus

$$R_k = 0, \quad \tfrac{1}{2}R_k = \sum_{h=2}^{m}\zeta u_h - (m-1)\zeta u_k + \sum_{i=2}^{m}\zeta(u_k - u_i), \quad (k=2,\dots,m, \; i \neq k)$$

bestimmen. Für $m = 2$ fliessen hieraus sowie durch Combination mit der Relation

$$(\wp u - \wp u_2)x' = \wp' u + \wp' u_2$$

zwei Formen einer *Hermite*schen Differentialgleichung dritter Ordnung, die zu (P.) bzw. (M.) in einer einfachen Beziehung stehen.

Auf demselben Wege gelangt man weiter zu den *Picard*schen ***Differentialgleichungen*** höherer Ordnung***). In dem speciellen Falle der *Hermite*schen Differentialgleichungen, deren Integralfunction eine Function zweiter Art vom ersten Grade darstellt, ergeben sich u. a. für die vierte Ordnung die vier zuerst von Herrn *Mittag-Leffler*†), für die fünfte die sechs zuerst von Herrn *Brioschi*††) aufgestellten „Typen". Hier gilt dieselbe Bemerkung wie für die Differentialgleichungen dritter Ordnung. Die Formen, welche unsere Methode liefert, sind schon die allgemeinen; und ebenso lassen sich auch hier aus einer Form der *Hermite*schen Differentialgleichung $n$ter Ordnung durch Benutzung von Differentialrelationen erster, zweiter, ..., $(n-2)$-ter Ordnung zahlreiche neue Formen ableiten.

Zum Schlusse dieses Theiles sei noch bemerkt, dass die Methode, welche zu den linearen Differentialgleichungen für die Functionen zweiter Art geführt hat, auch anwendbar ist, um die Differentialgleichungen für die Functionen dritter Art zu gewinnen.

---

*) Vgl. auch *Goursat*, Bulletin S. m. F. XII.

**) Vgl. *Halphen*, a. a. O. S. 499, 571.

***) Vgl. *Halphen*, a. a. O. S. 536.

†) Annali di matematica (2.) XI.

††) Sulla classe di equazione differenziali lineari considerate nella precedente Memoria del sig. *Mittag-Leffler*. Annali di matematica (2.) XI.

Dritter Theil.

IX.

Die *Casparyschen Differentialidentitäten.*

Wie Herr *Caspary* gezeigt hat*), kann man aus den Sigmafunctionen einer beliebigen Anzahl von Argumenten Ausdrücke bilden, die den neun Coefficienten a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ einer orthogonalen Substitution mit der Determinante $+1$ und den sechs Differentialgrössen

$$\begin{aligned} p_h &= -(a_{1k}da_{1l} + a_{2k}da_{2l} + a_{3k}da_{3l}), \\ v_h &= \quad a_{k1}da_{l1} + a_{k2}da_{l2} + a_{k3}da_{l3}, \end{aligned}$$

wo h, k, l die Zahlen 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 bezeichnen, genau gleich sind; dabei bleiben die Argumente, welche in die Sigma-Ausdrücke eingehen, vollkommen beliebig. Die 15 Grössen a_{mn}, p_h, v_h nennt Herr *Caspary* *Elemente eines Orthogonalsystemes***). In dem Falle, wo die Anzahl der Argumente gleich 1 ist, nehmen diese Beziehungen nachstehende ausserordentlich einfache Gestalt an:

$$\text{(C.)} \quad \left\{ \begin{aligned} a_{1h} \pm i a_{2h} &= -G^{\pm 1}\varepsilon_h \frac{\sigma_h(u \pm v)}{\sigma u \sigma v}, \\ a_{3h} &= \quad i\varepsilon_h \frac{\sigma_h u \sigma_h v}{\sigma u \sigma v}, \\ p_h &= \quad \varepsilon_h \frac{\sigma_h u \sigma_h v}{\sigma u \sigma v}[\zeta_h v\, du + \zeta_h u\, dv + d \log G], \\ v_1 \pm i v_2 &= \quad G^{\pm 1} \frac{\sigma(u \pm v)}{\sigma u \sigma v}(du \pm dv), \\ v_3 &= -i[\zeta v\, du + \zeta u\, dv + d \log G], \end{aligned} \right. \qquad (h = 1, 2, 3)$$

wo G eine beliebige Function und ε_h Constanten bedeuten***).

---

*) Sur une manière d'exprimer, au moyen des fonctions thêta d'un seul argument, les coefficients de trois systèmes orthogonaux dont un est composé des deux autres. C. R. 1888. — Sur une nouvelle méthode d'exposition de la théorie des fonctions thêta, et sur un théorème élémentaire relatif aux fonctions hyperelliptiques de première espèce. C. R. 1890.

**) Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduites des dites relations. *Liouvilles* J. (4.) VI, p. 367.

***) *Liouvilles* J. (4.) VI, p. 376. Vgl. auch *E. Jahnke* „Ueber eine neue Methode zur Entwickelung der Theorie der Sigmafunctionen mehrerer Argumente". Zeitschrift f. M. u. Ph. XXXV, S. 183.

Wie Herr *Caspary* weiter gefunden hat, genügen die *Elemente* a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$, p_h, v_h $(h = 1, 2, 3)$ gewissen durch ihre Einfachheit merkwürdigen *Differentialidentitäten**), unter ihnen den folgenden**):

$$(C_1.) \qquad d(a_{1h} \pm i a_{2h}) = \pm i (a_{1h} \pm i a_{2h}) v_3 \mp i a_{3h} (v_1 \pm i v_2).$$

Weiteres Differentiiren liefert***)

$$(C_2.) \quad d^2(a_{1h} \pm i a_{2h}) = -(a_{1h} \pm i a_{2h}) \Omega + p_h (v_1 \pm i v_2) + (\lambda_{1h} \pm i \lambda_{2h}),$$

wo

$$\begin{aligned} \Omega &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 & \lambda_{1h} &= a_{1k} dp_l - a_{1l} dp_k = -a_{2h} dv_3 + a_{3h} dv_2, \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, & \lambda_{2h} &= a_{2k} dp_l - a_{2l} dp_k = -a_{3h} dv_1 + a_{1h} dv_3, \\ & & \lambda_{3h} &= a_{3k} dp_l - a_{3l} dp_k = -a_{1h} dv_2 + a_{2h} dv_1, \end{aligned}$$

so dass die λ_{mn} aus den Identitäten $(J_1'.)$*) hervorgehen, wenn da_{mh}, p_h, v_h bzw. durch λ_{mh}, dp_h, dv_h ersetzt werden. Die fortgesetzte Differentiation führt zu den *Differentialidentitäten* höherer Ordnung.

Da die a_{mn}, wie aus (C.) ersichtlich, von den beiden Argumenten u und v abhängen, so stellen die *Differentialidentitäten* $(C_1.)$, $(C_2.)$, ... Systeme partieller Differentialgleichungen bzw. erster, zweiter, ... Ordnung dar. Es werde nun die beliebige Function G gleich einer Exponentialfunction mit einer bilinearen Form von u, v als Exponenten gesetzt; dann ergiebt sich ein unmittelbarer Zusammenhang der *Elemente eines Orthogonalsystems* mit den Functionen zweiter Art vom ersten Grade. Durch Einführung jenes Werthes für G in die obigen Identitäten müssen sich demnach, worauf schon Herr *Caspary* hingewiesen hat†), die Systeme partieller Differentialgleichungen erster, zweiter, ... Ordnung für die genannten Functionen ergeben.

X.

Herleitung der Differentialgleichungen für die *Caspary*schen *Elementarfunctionen zweiter Art* aus den *Differentialidentitäten.*

Die Functionen zweiter Art vom ersten Grade im *Caspary*schen Sinne sind durch

$$v_3 = \text{const.}$$

---

*) *Liouvilles* J. (4.) VI, S. 377. Diese Art von Identitäten findet sich wohl zuerst in der citirten Arbeit von Herrn *Caspary*.

**) a. a. O. S. 389.

***) Die hier folgende Differentialidentität verdanke ich einer gütigen Privatmittheilung von Herrn *Caspary*.

†) a. a. O. S. 368 und 404.

definirt, woraus im Hinblick auf (C.)

$$G = e^{-(u-a)(\zeta v-\lambda)-(v-b)(\zeta u-\mu)}.$$

Nun sind die Differentialgleichungen, denen die genannten Functionen genügen, in dem Falle eines Argumentes nichts anderes als das, was Herr *Mittag-Leffler* als *Hermite*sche *Differentialgleichungen* bezeichnet hat. Für deren Aufstellung ist es aber, wie in No. VIII nachgewiesen, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, erlaubt, λ bzw. $\mu = 0$ zu setzen. Demnach werden wir im Falle zweier Argumente mit Herrn *Caspary**)

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0,$$

d. h.

$$v_3 = 0,$$

also

$$\varphi_h = \frac{\sigma_h(u+v)}{\sigma u \sigma v} e^{-u\zeta v - v\zeta u} \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, 2, 3; \; \sigma_0 = \sigma \\ \varphi_0 = \varphi \end{pmatrix}$$

setzen dürfen**). Diese φ_h ($h = 0, 1, 2, 3$) sollen im Folgenden als die *Caspary*schen *Elementarfunctionen zweiter Art* bezeichnet werden.

Hierfür nehmen die Relationen (C.) die einfache Gestalt an:

$$(\text{C}^*.) \begin{cases} a_{1h} + i a_{2h} = -\varepsilon_h \varphi_h, & m_h = -\sqrt{\wp u - e_h}\sqrt{\wp v - e_h}, \\ v_{1h} + i v_{2h} = \varphi.(du+dv), & l_h = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\wp' v}{\wp v - e_h} m_h, \\ a_{3h} = -i\varepsilon_h m_h, & \\ p_h = \varepsilon_h(l_h du + k_h dv), & k_h = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\wp' u}{\wp u - e_h} m_h. \\ v_3 = 0, & \end{cases}$$

Wir beginnen mit der Aufstellung der Differentialgleichungen für φ. Ohne weiteres ergiebt sich

$$(\mathfrak{G}_1.) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = m\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = m\varphi, \quad m = \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

Folglich

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \left(m^2 + \frac{\partial m}{\partial u}\right)\varphi, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \left(m^2 + \frac{\partial m}{\partial v}\right)\varphi,$$

oder da***)

$$\frac{\partial m}{\partial u} = \wp u - \wp(u+v), \quad \frac{\partial m}{\partial v} = \wp v - \wp(u+v), \quad m^2 = \wp(u+v) + \wp u + \wp v:$$

$$(\mathfrak{G}_2.) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = (2\wp u + \wp v)\varphi, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = (2\wp v + \wp u)\varphi.$$

---

*) Vgl. *Caspary, Liouvilles* J. (4.) VI, p. 403.

**) Vgl. auch *Halphen,* a. a. O. S. 230 und *Frobenius,* Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art, Dieses Journal 93.

***) Vgl. *Weierstrass-Schwarz,* F. u. L. 12, 1 und 12, 5, 18, 1.

($\mathfrak{C}_2$.) stellt die Verallgemeinerung der *Lamé*schen Differentialgleichung für $m = 2$ auf den Fall zweier Argumente dar.

Aus ($\mathfrak{C}_2$.) folgt

$$(\mathfrak{C}_3.)\qquad \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}-(2\wp u+\wp v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}-2\wp' u\varphi = 0,\quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial v^3}-(2\wp v+\wp u)\frac{\partial\varphi}{\partial v}-2\wp' v\varphi = 0,$$

und hieraus, wie eine leichte Rechnung erkennen lässt, in dem Falle eines Argumentes die Differentialgleichung (P.) sowohl wie (M.); demnach stellt ($\mathfrak{C}_3$.) die Verallgemeinerung der *Picard*schen wie *Mittag-Leffler*schen Differentialgleichung dar.

Allgemein findet man

$$(\mathfrak{C}_n.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^n\varphi}{\partial u^n}-(2\wp u+\wp v)\dfrac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial u^{n-2}}-\cdots-2\dbinom{n-2}{\nu}\wp^{(\nu)}u\,\dfrac{\partial^{n-\nu-2}\varphi}{\partial u^{n-\nu-2}}-\cdots \\ \qquad\qquad \cdots-2\dbinom{n-2}{1}\wp^{(n-3)}u\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-2\wp^{(n-2)}u\,\varphi \;=\; 0, \\ \dfrac{\partial^n\varphi}{\partial v^n}-(2\wp v+\wp u)\dfrac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial v^{n-2}}-\cdots-2\dbinom{n-2}{\nu}\wp^{(\nu)}v\,\dfrac{\partial^{n-\nu-2}\varphi}{\partial v^{n-\nu-2}}-\cdots \\ \qquad\qquad \cdots-2\dbinom{n-2}{1}\wp^{(n-3)}v\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-2\wp^{(n-2)}v\,\varphi \;=\; 0. \end{cases}$$

($\mathfrak{C}_n$.) stellt im Falle eines Argumentes die *Hermite*sche Differentialgleichung $n$ter Ordnung dar, deren Integralfunction eine Function zweiter Art vom ersten Grade ist, und zwar ist diese Form schon die allgemeine Form, wie in No. VIII nachgewiesen worden ist. Aus dieser einen Form lassen sich, wie ebenda bemerkt wurde, zahlreiche neue Formen herleiten. Als Specialfälle ergeben sich aus ($\mathfrak{C}_n$.) für $n = 4$ die zuerst von Herrn *Mittag-Leffler* *) und für $n = 5$ die zuerst von Herrn *Brioschi* **) gefundenen *Hermite*schen Differentialgleichungen.

Es erübrigt noch, die Differentialgleichungen für φ_h ($h = 1, 2, 3$) aufzustellen.

Aus der Definition ergiebt sich zunächst

$$(\mathfrak{C}'_1.)\qquad \frac{\partial\varphi_h}{\partial u} = \left\{m+\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial\wp(u+v)}{\partial u}}{\wp(u+v)-e_h}\right\}\varphi_h,\quad \frac{\partial\varphi_h}{\partial v} = \left\{m+\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial\wp(u+v)}{\partial v}}{\wp(u+v)-e_h}\right\}\varphi_h.$$
$$(h = 1, 2, 3)$$

*) Ueber die Integration der *Hermite*schen Differentialgleichungen der dritten und vierten Ordnung etc. Annali di matematica (2.) XI.

**) Annali di matematica (2.) XI.



Aus (C_1.) folgt sodann mit Rücksicht auf (C^*.)

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial u} = m_h \varphi, \quad \frac{\partial \varphi_h}{\partial v} = m_h \varphi. \qquad (h = 1, 2, 3)$$

Mit Benutzung dieser Differentialrelationen erhält man aus (C_2.)

$$\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial u^2} = (\wp u - \wp v)\varphi_h + (mm_h - l_h)\varphi, \quad \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial v^2} = (\wp u - \wp v)\varphi_h + (mm_h - k_h)\varphi, \qquad (h = 1, 2, 3)$$

demnach

$$(\mathfrak{S}_2'.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi_h}{\partial u^2} - \left(m - \dfrac{l_h}{m_h}\right)\dfrac{\partial \varphi_h}{\partial u} - (\wp u - \wp v)\varphi_h = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_h}{\partial v^2} - \left(m - \dfrac{k_h}{m_h}\right)\dfrac{\partial \varphi_h}{\partial v} - (\wp u - \wp v)\varphi_h = 0. \end{cases} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

In analoger Weise lassen sich die Systeme partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung herleiten, welche zugleich neue Beispiele von solchen Differentialgleichungen darbieten, bei denen der erste Coefficient nicht constant ist*). Für den Fall eines Argumentes stellt ($\mathfrak{S}_2'$.) einen Specialfall von (P_2.), No. VIII, dar.

Die Erweiterung auf allgemeine Functionen zweiter Art lässt sich auf zwei Wegen bewerkstelligen. Einmal kann man von ($\mathfrak{S}_1'$.) ausgehen, wo $d\log\varphi_h$ auftritt, rechter Hand über alle Paare von Unendlichkeitsstellen $u = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $v = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ summiren und hieraus wieder die Differentialgleichungen höherer Ordnung herleiten. Der zweite Weg ist der im dritten Theile befolgten Methode genau angepasst und schon von Herrn *Caspary***) angegeben worden. Es ist nämlich möglich, aus den ***Elementen*** zweier Orthogonalsysteme ein neues Orthogonalsystem zusammenzusetzen und für dieses die Differentialgleichungen zu bilden.

---

*) Vgl. *Halphen*, l. c. II, p. 569.

**) Vgl. *Caspary*, Sur une manière d'exprimer, au moyen des fonctions thêta d'un seul argument, les coefficients de trois systèmes orthogonaux dont un est composé des deux autres. C. R. 1888.

Ueber algebraische Gleichungen zwischen eindeutigen Functionen, welche lineare Substitutionen in sich gestatten.

(Von Herrn *P. Stäckel* in Halle a. S.)

Herr *Poincaré* hat in einer seiner ausgezeichneten Abhandlungen über eindeutige Functionen einer complexen Veränderlichen, welche lineare Substitutionen in sich gestatten*), darauf hingewiesen, dass der Transformationstheorie der elliptischen Functionen eine entsprechende Theorie für diese allgemeineren Functionen an die Seite gestellt werden kann. Genauer ausgedrückt handelt es sich dabei um solche Functionen der angegebenen Art, welche, wie die elliptischen Functionen, innerhalb ihres Existenzbereiches keine wesentlich singulären Stellen besitzen und daher innerhalb des Fundamentalbereiches nur an einer endlichen Anzahl von Stellen unendlich werden; dabei ist jede Unendlichkeitsstelle so oft zu zählen, als die Ordnung des Unendlichwerdens beträgt. Diese Zahl werde als der *Grad* der betreffenden Function in Bezug auf den betrachteten Fundamentalbereich oder auch in Bezug auf die zugehörige Gruppe bezeichnet**).

Der Gedankengang, welchen Herr *Poincaré* einschlägt ist der, dass er zuerst die Bildung von Untergruppen untersucht und darauf den Fall betrachtet, dass die Gruppen von zwei eindeutigen Functionen, welche lineare Substitutionen in sich gestatten und einen endlichen Grad besitzen, eine gemeinschaftliche Untergruppe haben. Ist der Index dieser Untergruppe end-

*) Sur les groupes des équations linéaires, § 16: Théorie des sous-groupes, Acta mathematica, Bd. IV, S. 285, 1884; vgl. auch die vierte der 1885 im Auftrage König Oscars von Schweden gestellten Preisaufgaben, Acta mathematica, Bd. VII, S. V.

**) Für elliptische Functionen wendet Herr *Weierstrass* diese Bezeichnungsweise an, vgl. die Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, herausgegeben von Herrn *H. A. Schwarz*, S. 5.

lich, so ergiebt sich dann, dass zwischen beiden Functionen nothwendig eine algebraische Gleichung besteht.

Man kann aber umgekehrt von der Forderung ausgehen, dass zwischen zwei Functionen der betrachteten Art eine algebraische Gleichung bestehen soll, und nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen fragen, welche hierfür erforderlich sind. Es liegt dies um so näher, als sich die Transformationstheorie der elliptischen Functionen gerade auf diesem Wege in einfacher Weise begründen lässt, wie dies Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen gezeigt hat. Den weiteren Entwickelungen vorgreifend, will ich gleich hier das einfache Resultat, welches sich bei der Durchführung dieses Gedankens ergiebt, in folgendem Satze aussprechen:

Zwischen zwei eindeutigen Functionen, welche lineare Substitutionen in sich gestatten und von endlichem Grade sind, besteht dann und nur dann eine algebraische Gleichung, wenn ihre Gruppen eine gemeinschaftliche Untergruppe von endlichem Index besitzen.

Beim Beweise dieses Satzes sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. Hat eine der beiden betrachteten Functionen, etwa $\varphi(u)$, eine endliche Gruppe, so ist sie eine rationale Function von u, und daher ist auch $\psi(u)$, welches mit $\varphi(u)$ durch eine algebraische Gleichung verbunden sein sollte, eine rationale Function von u, und die Gruppe dieser Function ist ebenfalls endlich. Mithin sind die Gruppen entweder beide endlich oder beide unendlich. Sind beide endlich, so besteht zwischen $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(u)$ sicher eine algebraische Gleichung. Da aber in diesem Falle die identische Substitution $u = u$ als gemeinschaftliche Untergruppe mit *endlichem* Index angesehen werden darf, so gilt für ihn gerade der oben ausgesprochene Satz, und es kommt daher alles darauf an, den zweiten Fall zu untersuchen.

Aus dem Systeme der unbegrenzt vielen Substitutionen der Gruppe von $\varphi(u)$ möge auf irgend eine Weise eine Reihe von ebenfalls unendlich vielen linearen Substitutionen:

$$u' = \frac{a_\varkappa u + b_\varkappa}{c_\varkappa u + d_\varkappa} = u_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

herausgehoben werden. Dann ist:

$$\varphi(u_\varkappa) = \varphi(u). \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

Besteht nun zwischen $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(u)$ eine algebraische Gleichung:

$$G(x, y) = 0,$$

so ist diese Gleichung identisch erfüllt für $x = \varphi(u)$ und:

$$y_0 = \psi(u), \quad y_1 = \psi(u_1), \quad y_2 = \psi(u_2), \quad \ldots.$$

Da aber die Anzahl der verschiedenen Wurzeln eine endliche ist, so folgt, dass es ganze Zahlen $\varkappa$ und λ giebt, für welche $\psi(u_\varkappa) = \psi(u_\lambda)$ ist, und hieraus ergiebt sich sofort, dass auch eine ganze Zahl μ existirt, so dass $\psi(u) = \psi(u_\mu)$ ist. Mithin gehört die Substitution $u' = u_\mu$ der Gruppe von $\varphi(u)$ und auch der Gruppe von $\psi(u)$ an. Aus dem Bestehen der algebraischen Gleichung $G(x, y) = 0$ erschliesst man so, dass die Gruppen von $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ eine gemeinschaftliche Untergruppe besitzen.

Die Gesammtheit aller Substitutionen, welche den Gruppen von φ und ψ gemeinsam sind und die selbst nothwendig wieder eine Gruppe bilden, will ich als die *grösste gemeinschaftliche Untergruppe* dieser beiden Gruppen bezeichnen und werde jetzt zeigen, dass der Index dieser Gruppe in Bezug auf die beiden enthaltenden Gruppen nothwendig endlich ist. Angenommen nämlich, der Index der betrachteten Gruppe, wenn diese als Untergruppe der Gruppe von φ aufgefasst wird, sei unendlich, so setzt sich der Fundamentalbereich, welcher zu dieser Untergruppe gehört, aus unendlich vielen Fundamentalbereichen der Gesammtgruppe zusammen. Zu einem Werthe von $x = \varphi(u)$ gehören daher im Fundamentalbereiche der Untergruppe unendlich viele Werthe von u, die sich aber aus einer endlichen Anzahl von Werthen im Fundamentalbereiche der Gesammtgruppe mittelst linearer Substitutionen dieser Gruppe ergeben. Zu diesem Werthe von x gehören die Werthe von y, die man erhält, wenn in $\psi(u)$ die eben angegebenen Werthe von u eingesetzt werden. Da aber zwischen x und y eine algebraische Gleichung bestehen soll, so entspricht einem Werthe von x nur eine endliche Anzahl von Werthen der Grösse y. Es müssen sich also unter den eben angegebenen Grössen ψ unendlich viele einander gleiche befinden, das heisst aber nichts anderes, als *dass die Function $\psi(u)$ bei gewissen linearen Substitutionen der Gruppe von $\varphi(u)$ unverändert bleibt, welche der zu Grunde gelegten gemeinschaftlichen Untergruppe nicht angehören,* und dies steht in Widerspruch mit der Voraussetzung, dass diese Untergruppe die *grösste* gemeinschaftliche Untergruppe sei.

Soll also zwischen x und y eine algebraische Gleichung bestehen, so müssen nothwendig die Gruppen von φ und ψ eine gemeinschaftliche Untergruppe von endlichem Index besitzen. Diese Bedingung ist nothwendig. Sie ist aber auch hinreichend. Sind nämlich die Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$,

wie dies ja ausdrücklich vorausgesetzt wurde, beide von endlichem Grade in Bezug auf ihre Gruppen, so bleiben sie dies auch, wenn die grösste gemeinschaftliche Untergruppe als ihre Gruppe angesehen wird, weil der zu dieser Gruppe gehörige Fundamentalbereich sich aus einer endlichen Anzahl von Fundamentalbereichen der ursprünglichen Gruppen zusammensetzt. Herr *Poincaré**) hat aber bewiesen, dass zwischen zwei eindeutigen Functionen, welche bei derselben Gruppe linearer Substitutionen unverändert bleiben und in Bezug auf diese Gruppe beide von endlichem Grade sind, stets eine algebraische Gleichung besteht. Es möge noch hervorgehoben werden, dass der Beweis des *Poincaré*schen Satzes nicht voraussetzt, dass die linearen Substitutionen der gemeinsamen Gruppe etwa die vollständige Gruppe der beiden Functionen bilden; als *vollständige* Gruppe bezeichne ich die Gesammtheit aller linearen Substitutionen, welche eine Function unverändert lassen. Wesentlich ist nur die Voraussetzung des endlichen Grades beider Functionen in Bezug auf die gemeinschaftliche Gruppe, und da diese Voraussetzung hier erfüllt ist, so folgt, dass die eben gefundene Bedingung auch hinreichend ist. Damit ist aber die Richtigkeit des oben behaupteten Satzes in vollem Umfange dargethan.

Der Beweis, welcher soeben gegeben wurde, leistet jedoch noch mehr. Wir wollen annehmen, dass eine der beiden Functionen, etwa $\varphi(u)$, eine parabolische Substitution:

$$u' = \frac{au+b}{cu+d}$$

gestattet, das heisst eine Substitution, welche durch Einführung einer neuen Veränderlichen:

$$\xi = \frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}$$

auf die Form:

$$\xi' = \xi+k$$

gebracht werden kann. Da eine solche Substitution unendlich viele von einander verschiedene Iterationen liefert, so kann man diese als die linearen Functionen $u_1, u_2, \ldots$ des Beweises benutzen und erkennt dann, dass der gemeinschaftlichen Untergruppe von $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ parabolische Substitutionen angehören müssen. Hieraus aber folgt, *dass eine Function* $\varphi(u)$, *welche*

*) Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. Mathematische Annalen, Bd. XIX, S. 559, 1882.

parabolische Substitutionen gestattet, in algebraischem Zusammenhange nur mit solchen Functionen $\psi(u)$ stehen kann, welche ebenfalls parabolische Substitutionen in sich besitzen. Entsprechend kann eine Function $\varphi(u)$, welche keine parabolischen Substitutionen gestattet, nur dann mit einer Function $\psi(u)$ algebraisch verknüpft sein, wenn deren Gruppe ebenfalls keine parabolischen Substitutionen aufweist. Es ergiebt sich so eine Eintheilung der eindeutigen Functionen mit linearen Substitutionen in sich, deren Wichtigkeit im Folgenden noch mehr hervortreten wird.

Hat bei dieser Untersuchung die Theorie der elliptischen Functionen als Vorbild gedient und ist es gelungen, den Sätzen, welche für diese Functionen gelten, entsprechende Sätze für eindeutige Functionen mit linearen Substitutionen in sich an die Seite zu stellen, so wird man versuchen, auch andere Sätze aus jenem Gebiete auf dieses zu übertragen. Das Transformationsproblem der elliptischen Functionen lässt sich nun als specieller Fall eines allgemeineren Problemes auffassen, welches *Abel**) behandelt hat. Beschränkt man sich auf Integrale erster Gattung und algebraische Functionen, so lässt sich das *Abel*sche Problem so aussprechen, dass zwischen zwei elliptischen Functionen $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(v)$ eine algebraische Gleichung bestehen soll, während gleichzeitig eine ganze lineare Function der Integrale erster Gattung u und v algebraisch von x und y abhängt. *Abel* beweist dann, dass diese Forderung auf die Transformationstheorie zurückkommt. In einer nachgelassenen Abhandlung *Abels***) findet man die Fragestellung verallgemeinert, indem nur gefordert wird, dass einerseits zwischen x und y, andererseits zwischen u, v und x eine algebraische Gleichung statthaben soll, und es wird ein Beweis dafür angedeutet, dass die letztere Relation nothwendig die eben angegebene lineare Form hat. Verbindet man diese beiden Sätze, so erkennt man, dass auch das allgemeinere Problem zur Transformationstheorie zurückführt. In dieser Form hat *Kronecker****) dies wesentlich von *Abel* herrührende Theorem ausgesprochen und dafür einen strengen und eleganten Beweis gegeben.

---

*) Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, dieses Journal, Bd. IV, 1829 und Oeuvres complètes, nouvelle édition, T. I, S. 518.

**) Mémoire sur les fonctions transcendantes de la forme $\int y\,dx$, où y est une fonction algébrique de x, a. a. O., T. II. S. 206.

***) Zur Theorie der elliptischen Functionen, Art. XI, § 15, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1886, S. 752.

Hiermit ist ein Weg vorgezeichnet, den man bei der Untersuchung der eindeutigen Functionen mit linearen Substitutionen in sich einschlagen kann. Es wird sich darum handeln zu untersuchen, ***wann zwischen zwei solchen Functionen $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(v)$ eine algebraische Gleichung besteht, während gleichzeitig die Argumente u und v mit x algebraisch verknüpft sind.*** Hier soll aber nur der einfachere Fall erörtert werden, ***dass zwischen $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(v)$ eine algebraische Gleichung stattfindet, während die Argumente u und v algebraisch verknüpft sind.*** Bei dieser Annahme lässt sich die Untersuchung vollständig durchführen und ergiebt ein verhältnissmässig einfaches Resultat.

Es ist zweckmässig, zuerst den Fall zu betrachten, dass die eine der beiden Functionen, etwa $\varphi(u)$, eine endliche Gruppe hat und also eine rationale Function von u ist. Man erkennt dann sofort, dass y von u algebraisch abhängt und, da es eindeutig ist, auch eine rationale Function von u sein und daher ebenfalls eine endliche Gruppe haben muss. Wie bei der vorigen Untersuchung sind mithin die Gruppen entweder beide endlich oder beide unendlich. Sind sie endlich, so besteht zwischen $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(v)$ stets eine algebraische Gleichung, sobald u und v algebraisch mit einander verbunden sind; die algebraische Gleichung zwischen u und v darf dabei ganz willkürlich angenommen werden. Es bleibt daher nur der zweite Fall zu untersuchen.

Die algebraische Gleichung zwischen x und y wird identisch erfüllt, wenn in sie für x und y, bzw. $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ eingesetzt wird, wobei v als Function von u durch eine algebraische Gleichung

$$\Gamma(u, v) = 0$$

definirt ist, die als irreducibel vorausgesetzt werden darf und soll. Sind wieder $u_1, u_2, \ldots$ unbegrenzt viele lineare Functionen von u, für welche identisch:

$$\varphi(u) = \varphi(u_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

ist, so hat die Gleichung zwischen x und y, bei gegebenem Werthe von $x = \varphi(u)$, zu Wurzeln die Grössen:

$$\psi(v_1), \quad \psi(v_2), \quad \ldots,$$

und dabei müssen $v_1, v_2 \ldots$ den Gleichungen:

$$\Gamma(u_1, v_1) = 0, \quad \Gamma(u_2, v_2) = 0, \quad \ldots$$

genügen. Nun gehören aber zu einem Werthe von x nur endlich viele Werthe von y, es muss daher in der unendlichen Reihe der Grössen $\psi(v_\lambda)$ unendlich viele geben, die einem der Werthe von y, also auch einander gleich sind. Weiter ist nach Voraussetzung $\psi(v)$ von endlichem Grade. Hat man daher mehr Werthe des Argumentes v als der Grad von $\psi(v)$ beträgt, und ergeben alle diese Argumente denselben Werth der Function $\psi(v)$, so muss mindestens einer dieser Werthe von v aus einem anderen durch eine Substitution der Gruppe von $\psi(v)$ hervorgehen. *In der Reihe der Gleichungen:*

$$\Gamma(u_1, v_1) = 0, \quad \Gamma(u_2, v_2) = 0, \quad . \; . \; .$$

muss es also zwei geben, bei denen zwischen den zweiten Argumenten eine bilineare Relation besteht. Da endlich auch zwischen den ersten Argumenten eine solche Beziehung stattfindet, so ergiebt sich aus dieser Deduction folgende Eigenschaft, welche der Gleichung $\Gamma(u, v) = 0$ nothwendig zukommt. Es giebt zwei lineare gebrochene Functionen bzw. von u und v:

$$u' = \frac{au+b}{cu+d}, \quad v' = \frac{a'v+b'}{c'v+d'},$$

welche bzw. den Gruppen von $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ angehören, so dass gleichzeitig:

$$\Gamma(u, v) = 0, \quad \Gamma(u', v') = 0$$

ist.

Nach einem bekannten Satze kann man nun an Stelle von u und v neue Veränderliche:

$$\xi = \frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}, \quad \eta = \frac{\alpha' v+\beta'}{\gamma' v+\delta'}$$

einführen, für welche die Substitutionen:

$$u' = \frac{au+b}{cu+d}, \quad v' = \frac{a'v+b'}{c'v+d'}$$

je in eine der folgenden übergehen:

$$\xi' = \begin{cases} \xi+k \\ \varrho.\xi \end{cases}, \quad \eta' = \begin{cases} \eta+l \\ \sigma.\eta \end{cases},$$

so dass sich durch Combination vier Möglichkeiten ergeben. Denkt man sich nun von vornherein diese Veränderlichen ξ und η eingeführt, so erhält man an Stelle von $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ zwei Functionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\eta)$. Diese Functionen besitzen ebenfalls unendlich viele lineare Substitutionen in sich, und zwar ergeben sich ihre Gruppen aus denen von $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ sofort vermöge des linearen Zusammenhanges zwischen ξ und u, bzw. η und v.

In Bezug auf diese Gruppen sind $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\eta)$ von endlichem Grade. Besteht ferner zwischen φ und ψ eine algebraische Gleichung, während die Argumente u und v algebraisch verknüpft sind, so gilt dasselbe auch von Φ und Ψ, bzw. ξ und η. Es sei:

$$f(\xi,\ \eta) = 0$$

die irreducible Gleichung zwischen ξ und η, dann ergiebt sich aus der vorhergehenden Deduction, dass mit dieser Gleichung zusammen auch eine der folgenden Gleichungen bestehen muss:

$$\begin{array}{ll} \text{(I.)} & f(\xi+k,\ \eta+l) = 0, \\ \text{(II.)} & f(\varrho\xi,\ \sigma\eta) = 0, \\ \text{(III}^{\text{a}}\text{.)} & f(\varrho\xi,\ \eta+l) = 0, \\ \text{(III}^{\text{b}}\text{.)} & f(\xi+k,\ \sigma\eta) = 0. \end{array}$$

Das Problem, auf welches man hierdurch geführt wird, lässt sich auch so aussprechen, dass diejenigen irreduciblen algebraischen Curven gesucht werden, welche bei den aus den Gleichungen ersichtlichen linearen Transformationen in sich übergehen; dabei ergeben sich, wie man leicht erkennt, nur drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten.

Bereits in einer Abhandlung von *Clebsch* und *Gordan* aus dem Jahre 1868*) treten Fragen dieser Art, allerdings nur beiläufig, auf, und bald darauf haben die Herren *Klein* und *Lie***) die algebraischen und transcendenten Curven bestimmt, welche infinitesimale Transformationen in sich zulassen, wie sie durch die Gleichungen (I.)—(III.) definirt werden. Man erhält so bzw. die „*W-Curven*“:

$$\begin{array}{ll} 1.) & B(\xi-\xi_0) = A(\eta-\eta_0), \\ 2.) & \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^B = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^A, \\ 3.) & \eta-\eta_0 = B(\log\xi-\log\xi_0). \end{array}$$

Soweit diese Curven irreducible algebraische Curven sind, genügen sie auch

---

*) Ueber trilineare Formen mit contra-gredienten Variabeln, Mathematische Annalen, Bd. I, S. 359.

**) Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Mathematische Annalen, Bd. IV, S. 50, 1871; vgl. auch die Note: Sur une certaine famille de courbes et de surfaces, Comptes Rendus, Juni 1870.

bzw. den Gleichungen (I.)—(III.). Da 1.) eine gerade Linie darstellt, ist diese Bedingung immer erfüllt. Für die Curven 2.) ist nothwendig, dass A und B ganze positive oder negative Zahlen sind, und für die Curven 3.), dass $B = 0$ ist, was bewirkt, dass man auch hier nur gerade Linien und zwar parallel der ξ-Axe erhält.

Aber das Problem, um welches es sich hier handelt, ist allgemeiner, insofern die hier betrachteten Gruppen linearer Transformationen keine infinitesimalen Transformationen enthalten, da sie bzw. den Gruppen der eindeutigen Functionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\eta)$ angehören und im Sinne von Herrn *Poincaré* discontinuirlich sind.

Trotzdem wird sich herausstellen, dass für die Gleichungen (I.) und (III.) die algebraischen W-Curven 1.) und 3.) die einzige Lösung sind, während freilich bei der Gleichung (II.) noch andere Curven ausser den W-Curven 2.) erhalten werden. Indess lässt sich zeigen, dass diese neuen Curven für das functionentheoretische Problem nicht in Betracht kommen. Und da dasselbe für die Lösung 3.) $\eta = \eta_0$ gilt, so reducirt sich alles auf die beiden Möglichkeiten:

$$1.)\quad B(\xi-\xi_0) = A(\eta-\eta_0),$$

$$2.)\quad \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^B = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^A.$$

Die Gleichungen (I.)—(III.) lassen sich auch als ein specieller Fall des Problemes auffassen, alle algebraischen Curven $f(\xi,\eta) = 0$ zu bestimmen, welche rationale eindeutig umkehrbare Transformationen:

$$\xi' = r(\xi,\ \eta),\quad \eta' = s(\xi,\ \eta)$$

in sich gestatten, und es kommen hier für continuirliche Transformationen die bekannte Abhandlung von Herrn *H. A. Schwarz* *) und die anschliessenden Untersuchungen der Herren *Hettner* **) und *Nöther* ***) in Betracht,

---

*) Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich zulassen. Dieses Journal Bd. 87, S. 139, 1879; Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 285.

**) Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen, Göttinger Nachrichten, 1880, S. 85.

***) Ueber die algebraischen Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen, Mathematische Annalen, Bd. XX, S. 59, 1882.

während die discontinuirlichen Transformationen von den Herren **Fuchs***) und **Hurwitz****) behandelt worden sind. Ich ziehe es aber vor, die Untersuchung des vorliegenden einfachen Specialfalles direct zu erledigen, und folge bei der Discussion der Gleichungen (I.) und (III.) Herrn **Hurwitz*****), welcher diese in einfacher Weise durgeführt hat. Dann behandele ich die Gleichung (II.), die etwas mehr Umstände macht.

Stellen die Gleichungen:

$$\text{(I.)} \qquad f(\xi,\ \eta) = 0, \quad f(\xi+k,\ \eta+l) = 0$$

dieselbe irreducible algebraische Curve dar, und ist (ξ_0, η_0) ein Punkt derselben, welcher im Endlichen liegt, so gehören der Curve auch die Punkte $(\xi_0+nk,\ \eta_0+nl)$ an, wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Die Curve ist daher identisch mit der geraden Linie, welche durch die Punkte (ξ_0, η_0) und $(\xi_0+k,\ \eta_0+l)$ geht, und ihre Gleichung lautet:

$$1.) \quad k(\eta-\eta_0) = l(\xi-\xi_0),$$

so dass auch bei der allgemeineren Annahme die W-Curve 1.) zum Vorschein kommt.

Wenn die Gleichungen:

$$\text{(III.)} \qquad f(\xi,\ \eta) = 0, \quad f(\xi+k,\ \sigma\eta) = 0$$

dieselbe irreducible algebraische Curve ergeben sollen, muss es eine Constante λ von der Beschaffenheit geben, dass die Gleichung:

$$\lambda . f(\xi,\ \eta) = f(\xi+k,\ \sigma\eta)$$

identisch in ξ und η besteht, und ist η^m die höchste Potenz von η in $f(\xi, \eta)$, so ist $\lambda = \sigma^m$. Betrachtet man jetzt die Schnittpunkte der Curve mit der ξ-Axe, so ist zu unterscheiden, ob wenigstens einer dieser Punkte im Endlichen liegt, oder ob alle ins Unendliche fallen. Im ersten Falle sei $(\xi_0, 0)$ ein solcher Schnittpunkt im Endlichen. Da nun die Curve durch die lineare Transformation:

$$\xi' = \xi+k, \quad \eta' = \sigma . \eta$$

*) Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eine Involution zulassen, und: Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1886, Seite 797, und Jahrgang 1887, Seite 159.

**) Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich gestatten, Göttinger Nachrichten 1887, Seite 85, wieder abgedruckt: Mathematische Annalen, Bd. XXXII, Seite 290, 1888.

***) Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen, Mathematische Annalen, Bd. XIX, Seite 57, 1881.

in sich übergeht, so hat sie mit der ξ-Axe auch die Punkte $(\xi_0+nk, 0)$ gemeinsam, wo n wieder eine ganze Zahl bedeutet; folglich ist sie mit der ξ-Axe identisch, und ihre Gleichung lautet $\eta = 0$. Da aber bei den functionentheoretischen Betrachtungen ξ und η Variable sind, so ist dies unstatthaft, und es müssen daher alle jene Schnittpunkte im Unendlichen liegen. Dann hat nach bekannten algebraischen Sätzen die ganze Function $f(\xi, \eta)$ die Form:

$$f(\xi, \eta) = \eta . f_1(\xi, \eta) + c_1,$$

wo c_1 eine von Null verschiedene Constante bedeutet. Man erkennt leicht, dass für f_1 die Identität

$$\sigma^{m-1} . f_1(\xi, \eta) = f_1(\xi+k, \sigma\eta)$$

besteht, sodass auch die Gleichungen

$$f_1(\xi, \eta) = 0, \quad f_1(\xi+k, \sigma\eta) = 0$$

dieselbe algebraische Curve darstellen, welche jedoch reducibel sein kann. Entweder hat diese Curve mit der ξ-Axe einen Punkt im Endlichen gemeinsam, und dann ist die ξ-Axe ein Bestandtheil von ihr, also $f_1(\xi, \eta)$ algebraisch theilbar durch η, oder dies ist nicht der Fall, und es ist identisch:

$$f_1(\xi, \eta) = \eta . f_2(\xi, \eta) + c_2;$$

diese Gleichung gilt aber auch im ersten Falle, in welchem die Constante c_2 den Werth Null hat. Indem man so weiter schliesst, erhält man endlich die Gleichung:

$$f(\xi, \eta) = \eta^m . f_m(\xi) + g(\eta).$$

Dabei bedeutet $g(\eta)$ eine ganze Function von η vom Grade $m-1$ und $f_m(\xi)$ eine ganze Function von ξ, welche der Gleichung genügt:

$$f_m(\xi) = f_m(\xi+k).$$

Mithin ist f_m eine Constante, und dann folgt aus der Irreducibilität von $f(\xi, \eta) = 0$, dass die Gleichung der gesuchten Curve

$$\eta - \eta_0 = 0$$

ist, was wieder unstatthaft ist. Die Möglichkeit (III.), welche übrigens die W-Curven 2.) geliefert hat, kann daher bei den functionentheoretischen Betrachtungen gar nicht vorkommen.

Etwas umständlicher gestaltet sich die Discussion der Gleichung (II.). Geht die Curve $f(\xi, \eta) = 0$ nicht durch den Anfangspunkt $(0, 0)$, so ist

identisch:

$$f(\xi,\ \eta) = f_1(\xi,\ \eta) + c,$$

wo $f_1(0, 0) = 0$ ist und c eine von Null verschiedene Constante bedeutet. Soll

$$f(\varrho\xi,\ \sigma\eta) = f_1(\varrho\xi,\ \sigma\eta) + c = 0$$

dieselbe Curve darstellen, so muss die Gleichung

$$f(\xi,\ \eta) = f(\varrho\xi,\ \sigma\eta)$$

identisch in ξ und η bestehen, woraus, durch Vergleichung der Coefficienten, Relationen der Form:

$$\varrho^m \sigma^n = 1$$

folgen, in denen m und n ganze positive Zahlen sind. Diese Relationen brauchen aber nicht unabhängig von einander zu sein und können sich im äussersten Falle auf eine einzige reduciren; dann kommen ξ und η in $f(\xi, \eta)$ nur in der einen Verbindung $\xi^m . \eta^n$ vor, und in Folge der Irreducibilität ist die Gleichung der Curve einfach:

$$\xi^m . \eta^n = c;$$

man erhält so eine W-Curve 3.). Bestehen weiter zwei unabhängige Relationen der angegebenen Form, so ergeben sich aus ihnen ϱ und σ als Wurzeln der Einheit. Es wird sich später herausstellen, dass dies bei dem functionentheoretischen Probleme auszuschliessen ist, weshalb diese Möglichkeit nicht ausführlicher untersucht werden soll.

Es bleibt zu ermitteln, was geschieht, wenn die Curve durch den Anfangspunkt (0, 0) geht. Hat sie mit der ξ-Axe noch einen anderen im Endlichen gelegenen Punkt $(\xi_0, 0)$ gemeinsam, so ist auch $f(\varrho^n . \xi_0, 0) = 0$, und entweder ist $\eta = 0$ die Gleichung der Curve, was unstatthaft ist, oder ϱ eine Wurzel der Einheit. Entsprechende Schlüsse gelten auch für die η-Axe, und es ergeben sich durch Combination folgende vier Möglichkeiten:

1) ϱ und σ sind *beide* Wurzeln der Einheit,

2) sowohl die Gleichung $f(\xi, 0) = 0$, als auch die Gleichung $f(0, \eta) = 0$ haben als endliche Wurzeln nur bzw. $\xi = 0$ und $\eta = 0$,

3) $f(\xi, 0) = 0$ hat als endliche Wurzel nur $\xi = 0$, und σ ist eine Wurzel der Einheit,

4) $f(0, \eta) = 0$ hat als endliche Wurzel nur $\eta = 0$, und ϱ ist eine Wurzel der Einheit.

Es lässt sich aber zeigen, dass die beiden letzten Möglichkeiten nur eintreten können, wenn ϱ und σ *beide* Wurzeln der Einheit sind. Es genügt,

dies für die dritte Möglichkeit nachzuweisen. Soll diese stattfinden, so ist identisch

$$f(\xi, \eta) = a\xi^m + \eta . g(\xi, \eta),$$

wo a wegen der Irreducibilität eine von Null verschiedene Constante ist. Da nun $f(\xi, \eta) = 0$ und $f(\varrho\xi, \sigma\eta) = 0$ dieselbe Curve darstellen sollen, so muss identisch

$$g(\xi, \eta) = \varrho^{-m} . \sigma g(\varrho\xi, \sigma\eta)$$

sein. Hieraus folgt durch Vergleichung der Coefficienten:

$$1 = \varrho^{-m} . \sigma\varrho^{\varkappa}\sigma^{\lambda}.$$

Nun ist σ eine Wurzel der Einheit, also etwa $\sigma^n = 1$, folglich auch:

$$\varrho^{n(\varkappa - m)} = 1,$$

mithin entweder auch ϱ eine Wurzel der Einheit oder $\varkappa = m$. Allein die letztere Annahme würde zur Folge haben, dass $f(\xi, \eta)$ durch ξ^m theilbar ist, und dann wäre $\xi = 0$ die Gleichung der Curve, was, ebenso wie früher $\eta = 0$, auszuschliessen ist.

Mithin sind entweder ϱ und σ beide Wurzeln der Einheit, oder die Curve hat im Endlichen mit der ξ- und η-Axe nur den Anfangspunkt gemeinsam. Die erste Möglichkeit ist, wie schon erwähnt wurde, für die functionentheorethische Betrachtung irrelevant, es kommt also alles auf die Untersuchung der zweiten an.

Hat die Gleichung $f(\xi, 0) = 0$ nur die Wurzel $\xi = 0$, so ist identisch

$$f(\xi, \eta) = a\xi^m + \eta g(\xi, \eta),$$

und soll auch $f(0, \eta) = 0$ nur die Wurzel $\eta = 0$ haben, so ist weiter

$$f(\xi, \eta) = a\xi^m + b\eta^n + \xi\eta h(\xi, \eta),$$

wo a und b von Null verschiedene Constanten, m und n positive ganze Zahlen bedeuten. Entweder ist nun $h(\xi, \eta)$ identisch gleich Null, und dann ist $f(\xi, \eta) = 0$ eine W-Curve 2.), oder dies ist nicht der Fall. Soll dann

$$f(\varrho\xi, \sigma\eta) = a\varrho^m\xi^m + b\sigma^n\eta^n + \varrho\sigma\xi\eta . h(\varrho\xi, \sigma\eta) = 0$$

dieselbe Curve darstellen, so ist identisch

$$\varrho^m = \sigma^n,$$

und

$$\varrho^m h(\xi, \eta) = \varrho\sigma h(\varrho\xi, \sigma\eta).$$

Ist aber $h(\xi, \eta)$ nicht identisch gleich Null und

$$H . \xi^{\varkappa-1}\eta^{\lambda-1}$$

ein Term davon, so muss identisch sein:

$$\varrho^m = \varrho^\varkappa . \sigma^\lambda.$$

Ist diese Gleichung von der vorhergehenden $\varrho^m = \sigma^n$ unabhängig, so sind ϱ und σ Wurzeln der Einheit, es kommt also hier nur der Fall in Betracht, dass die neue Relation zwischen ϱ und σ eine Folge der alten ist. Mithin muss

$$m = \varkappa + \lambda \frac{m}{n}$$

sein, eine Gleichung, die sich auch in der Form

$$\frac{\varkappa}{m} + \frac{\lambda}{n} = 1$$

schreiben lässt, woraus folgt, dass die positiven ganzen Zahlen $\varkappa$ und λ bzw. kleiner als m und n sein müssen. Schreibt man aber die Gleichung in der Form

$$(m - \varkappa).n = m.\lambda,$$

so ergiebt sich, dass die Zahlen m und n einen gemeinschaftlichen Theiler haben müssen; denn wären sie relativ prim, so wäre λ durch n theilbar, also, da es kleiner als n ist, gleich Null, während es doch mindestens gleich 1 sein muss. Es sei also:

$$m = gm', \quad n = gn',$$

und m' und n' relativ prim, g mindestens gleich 2. Aus der Gleichung

$$(gm' - \varkappa).n' = m'\lambda$$

folgt, dass $\varkappa$ und λ bzw. durch m' und n' theilbar sind, es ist daher:

$$\varkappa = \mu m', \quad \lambda = \nu n',$$

wobei noch $\mu + \nu = g$ sein muss. Hiermit ist aber bewiesen, dass $f(\xi, \eta)$ eine *homogene* Function der Grössen

$$s = \xi^{m'}, \quad t = \eta^{n'}$$

der Dimension g ist. Folglich lässt sich die Curvengleichung auf die Form

$$2.) \qquad \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^B = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^A$$

bringen, es ergiebt sich also eine W-Curve; A und B dürfen hierbei unbeschadet der Allgemeinheit als ganze Zahlen angenommen werden, die zu einander relativ prim sind.

Fasst man das Resultat der Discussion von Gleichung (II.) zusammen, so findet man, dass entweder ϱ und σ Wurzeln der Einheit sind oder die Curve $f(\xi, \eta) = 0$ eine W-Curve 2) ist, wobei A und B positive oder negative ganze Zahlen sein müssen.

Hiermit ist die Discussion der Gleichungen (I.), (II.) und (III.) beendet, und es handelt sich jetzt darum, die gewonnenen Resultate für das functionentheoretische Problem zu benutzen. Dazu erinnere man sich, dass die linearen Substitutionen, welche die Curve $f(\xi, \eta) = 0$ in sich überführen sollten, Substitutionen bzw. der Gruppen von Φ und Ψ waren, welchen in einfachster Weise Substitutionen der Gruppen von φ und ψ entsprechen. Gestattet nun die Function $\varphi(u)$ eine parabolische Substitution, so besitzt diese Substitution unendlich viele von einander verschiedene Iterationen, und diese kann man bei dem oben gegebenen Beweise als Functionen $u_1, u_2, \ldots$ benutzen. Dann aber wird

$$u' = \frac{au+b}{cu+d}$$

ebenfalls eine parabolische Substitution, und es ist daher:

$$\xi' = \xi + k.$$

Die Curve $f(\xi, \eta) = 0$ genügt daher entweder der Gleichung (I.) oder der Gleichung (III.). Es hat sich aber herausgestellt, dass die Gleichung (III.) zu unstatthaften Folgerungen führt. Soll also zwischen Φ und Ψ eine algebraische Gleichung bestehen, so muss man zu der Gleichung (I.) gelangen, und dies erfordert, dass

$$v' = \frac{a'v+b'}{c'v+d'}$$

ebenfalls eine parabolische Substitution ist. *Damit aber ist gezeigt, dass zwischen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ nur dann eine algebraische Gleichung bestehen kann, wenn die zugehörigen Gruppen entweder beide parabolische Substitutionen enthalten, oder beide keine Substitutionen dieser Art aufweisen.*

Diese Eintheilung der eindeutigen Functionen mit linearen Substitutionen in sich in zwei Arten trat schon am Anfang dieser Abhandlung auf, und ihre Wichtigkeit wird sich im Folgenden immer mehr herausstellen.

Besteht zwischen zwei Functionen mit parabolischen Substitutionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ eine algebraische Gleichung, während die Argumente u und v durch eine Relation

$$\Gamma(u, v) = 0$$

mit einander verknüpft sind, so folgt aus den vorhergehenden Untersuchungen, dass diese Gleichung vermöge einer Substitution

$$\xi = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}, \quad \eta = \frac{\alpha' v + \beta'}{\gamma' v + \delta'}$$

in die lineare Gleichung

$$k(\eta - \eta_0) - l(\xi - \xi_0) = 0$$

übergehen muss. Es besteht also nothwendig zwischen u und v eine bilineare Relation, aus welcher man

$$v = \frac{Au + B}{Cu + D}$$

erhält. Betrachtet man aber

$$\psi\left(\frac{Au + B}{Cu + D}\right)$$

als Function von u, die mit $\chi(u)$ bezeichnet werde, so ist $\chi(u)$ ebenfalls eine eindeutige Function, welche lineare Substitutionen in sich gestattet und von endlichem Grade ist. *Die Forderung, dass zwischen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ eine algebraische Gleichung stattfindet, führt also bei den Functionen mit parabolischen Substitutionen zur Transformation zurück. Diese Functionen sind also auch in dieser Beziehung genau das Analogon der elliptischen Functionen.*

Ganz anders verhält es sich mit den Functionen der zweiten Art, denn bei diesen braucht die Beziehung zwischen u und v keineswegs linear zu sein, sondern muss die angegebene Form

$$\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^B = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^A$$

haben, in der ξ und η durch die bekannten linearen Functionen von u und v zu ersetzen sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich sofort, wenn nur noch gezeigt wird, dass die Annahme, ϱ und σ seien Wurzeln der Einheit, welche oben ausgeschlossen wurde, in der That unstatthaft ist, und dies soll jetzt geschehen.

Besitzt die Function $\varphi(u)$ keine parabolischen Substitutionen, so lässt sich jede ihrer Substitutionen auf die Form

$$\xi' = \varrho\xi$$

bringen. Ist eine der Zahlen ϱ, welche man so erhält, keine Wurzel der Einheit, so gestattet die zugehörige lineare Substitution unendlich viele von einander verschiedene Iterationen, und diese darf man als die linearen Functionen u_1, u_2, ... in dem oben angegebenen Beweise nehmen. Thut man

dies, so gestattet die Curve $f(\xi, \eta) = 0$ eine Transformation

$$\xi' = \varrho \xi, \quad \eta' = \sigma \eta,$$

in welcher ϱ und σ nicht beide Wurzeln der Einheit sind, und ihre Gleichung hat daher die eben erwähnte Form. Es bleibt also nur die Möglichkeit übrig, dass jede Substitution der Gruppe von $\varphi(u)$ nur eine endliche Anzahl von einander verschiedener Iterationen gestattet, oder, in der Bezeichnungsweise von Herrn *F. Klein*, elliptisch ist. Allein dies steht in Widerspruch mit der Voraussetzung, dass diese Gruppe aus unendlich vielen Substitutionen besteht. Um dies einzusehen, braucht man sich nur klar zu machen, dass das Verfahren mittelst dessen Herr *Gordan**) alle endlichen Gruppen linearer Substitutionen gefunden hat, im Grunde zur Lösung der Aufgabe führt, alle Gruppen zu bestimmen, welche aus einer endlichen Anzahl erzeugender linearer Substitutionen hervorgehen und deren Substitutionen sämmtlich elliptisch sind. Ganz direct aber ergiebt es sich aus einem Satze, welcher von Herrn *W. Dyck***) herrührt und der sich so aussprechen lässt: Benutzt man eine endliche Anzahl von Operationen

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_m$$

zur Erzeugung einer Gruppe, so kann diese Gruppe nur dann unendlich viele von einander verschiedene Operationen enthalten, wenn ausser den Relationen

$$A_1^{\nu_1} = 1, \quad A_2^{\nu_2} = 1, \quad \ldots, \quad A_m^{\nu_m} = 1$$

nur noch eine von vornherein angebbare Anzahl weiterer Relationen zwischen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ besteht; wird diese Anzahl überschritten, so ist die Gruppe nothwendig endlich.

Um zu untersuchen, wann zwischen zwei Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ ohne parabolische Substitutionen eine algebraische Gleichung besteht, wird man zunächst neue Veränderliche ξ und η in der oben angegebenen Weise einführen und so die Functionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\eta)$ erhalten. Zwischen ξ und η muss dann eine irreducible Relation der Form

$$\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^B = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^A$$

bestehen, wo A und B positive oder negative ganze Zahlen sein müssen.

---

*) Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen, Mathematische Annalen, Bd. XII, S. 23, 1877.

**) Gruppentheoretische Studien, Mathematische Annalen, Bd. XX, Seite 1, 1882.

Diese Gleichung wird identisch erfüllt durch:

$$\xi = \xi_0 t^A, \quad \eta = \eta_0 t^B,$$

so dass also zwischen $\Phi(\xi_0 t^A)$ und $\Psi(\eta_0 t^B)$ eine algebraische Gleichung stattfinden soll. Fasst man diese Functionen als Functionen von t auf, so sind es eindeutige Functionen mit rationalen Substitutionen in sich selbst. Man findet dann leicht, dass eine algebraische Gleichung zwischen zwei solchen Functionen nur dann stattfinden kann, wenn die zugehörigen Gruppen eine gemeinschaftliche Untergruppe besitzen, und kommt so auf Fragen, deren Erledigung gegenwärtig wohl noch auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst. Dagegen bleibt man bei den eindeutigen Functionen mit parabolischen Substitutionen durchaus im Gebiete der Functionen mit linearen Substitutionen in sich.

Es dürfte angebracht sein, die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchungen zusammenzufassen. *Es handelte sich um die Aufgabe, zu ermitteln, wann zwischen zwei eindeutigen Functionen, welche lineare Substitutionen in sich gestatten und einen endlichen Grad besitzen, eine algebraische Gleichung bestehen kann, während ihre Argumente durch eine algebraische Relation verknüpft sind. Bei der Lösung dieser Aufgabe sind drei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden:*

I. *Sind die Gruppen der beiden Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ endlich, so bleibt die algebraische Relation zwischen u und v ganz willkürlich und, wie sie auch angenommen ist, immer besteht eine algebraische Gleichung zwischen den beiden Functionen.*

II. *Sind die Gruppen der beiden Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ unendlich und enthalten beide keine parabolischen Substitutionen, so hat die algebraische Relation zwischen u und v nothwendig eine ganz bestimmte Form; zu entscheiden, wann diese Bedingung auch hinreichend ist, erfordert eine besondere Untersuchung, bei welcher die Betrachtung von Functionen mit rationalen Substitutionen in sich nöthig wird.*

III. *Sind die Gruppen der beiden Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ unendlich und enthalten beide parabolische Substitutionen, so ist die Relation zwischen u und v nothwendig bilinear, und die Frage, wann wirklich eine algebraische Gleichung zwischen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ besteht, kommt auf das Transformationsproblem der eindeutigen Functionen mit linearen Substitutionen in sich zurück.*

Andere Möglichkeiten giebt es nicht.

Zum Schlusse sei noch eine Bemerkung gestattet, welche sich auf den dritten und interessantesten Fall bezieht. Wenn sich auch herausgestellt hat, dass gerade dann das Problem, um welches es sich handelt, im wesentlichen mit dem Transformationsprobleme identisch ist, so hat doch die Frage eine ganz besondere Wichtigkeit, wann zwischen einer eindeutigen Function mit linearen Substitutionen in sich und derselben Function von einem anderen Argumente, welches mit dem ersten durch eine bilineare Relation verbunden ist, also zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi\left(\frac{Au+B}{Cu+D}\right)$, eine algebraische Gleichung besteht. Ist $\varphi(u)$ eine elliptische Function, so ist das zweite Argument nothwendig von der Form $Au+B$, weil $\varphi(u)$ nur die eine wesentlich singuläre Stelle $u=\infty$ haben darf, und die Frage, wann $\varphi(u)$ und $\varphi(Au+B)$ algebraisch verbunden sind, führt vermöge des algebraischen Additionstheoremes sofort zur Multiplication und im besonderen zur *complexen Multiplication* der elliptischen Functionen. Letztere beruht darauf, dass die Gruppe der elliptischen Functionen einen Parameter, das Periodenverhältniss, enthält, sodass die Bedingung für die Existenz einer gemeinschaftlichen Untergruppe in Form einer algebraischen Gleichung für den Parameter erscheinen kann. Aehnliche Untersuchungen lassen sich auch für eindeutige Functionen mit linearen Substitutionen in sich anstellen. Auf diese Verallgemeinerung der complexen Multiplication hoffe ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen zu können.

Ueber die Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix.

(Von Herrn *K. Th. Vahlen.*)

Auf die Aufgabe, die Relationen aufzustellen, welche zwischen den Determinanten einer Matrix bestehen müssen, wird man geführt, wenn man eine ebene μ-fache einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit entnommene Mannigfaltigkeit durch diejenigen Coordinaten definirt, welche den *Plücker*schen Coordinaten einer Geraden im Raume analog sind.

Wird ein Punkt x einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit durch $n+1$ homogene Coordinaten $x_0, x_1, \dots, x_n$ bestimmt, so erfüllen alle Punkte x, deren Coordinaten $x_0, x_1, \dots, x_n$ homogene lineare Functionen der Coordinaten von μ in allgemeiner Lage gegebenen festen Punkten $x^{(k)}$

$$x_0^{(k)}, \quad x_1^{(k)}, \quad \dots, \quad x_n^{(k)} \qquad (k=1, 2, \dots, \mu)$$

sind, also:

$$x_i = \alpha^{(1)} x_i^{(1)} + \alpha^{(2)} x_i^{(2)} + \dots + \alpha^{(\mu)} x_i^{(\mu)}, \qquad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

eine durch jene μ Punkte gehende, durch sie bestimmte $(\mu-1)$-fache ebene Mannigfaltigkeit. Wählt man in dieser statt der μ Punkte

$$x^{(k)} \qquad (k=1, 2, 3, \dots, \mu)$$

μ beliebige andere Punkte $y^{(k)}$, die mit jenen durch die Gleichungen:

$$y_i^{(k)} = \sum_h \alpha_k^{(h)} x_i^{(h)} \qquad \begin{pmatrix} h=1, 2, \dots, \mu \\ i=0, 1, \dots, n \\ k=1, 2, \dots, \mu \end{pmatrix}$$

zusammenhängen mögen, so unterscheiden sich die Determinanten μter Ordnung der Matrix $(y_i^{(k)})$ von den entsprechenden der Matrix $(x_i^{(k)})$ nur durch den Factor

$$|\alpha_k^{(h)}|. \qquad (h, k=1, 2, \dots, \mu)$$

Ausser durch das Gleichungssystem:

$$x_i = \sum_h \alpha^{(h)} x_i^{(h)} \qquad \begin{pmatrix} h=1, 2, \dots, \mu \\ i=0, 1, \dots, n \end{pmatrix}$$

kann die $(\mu-1)$-fache Mannigfaltigkeit auch durch das System linearer Gleichungen bestimmt werden, welches sich durch Elimination der Grössen $\alpha^{(h)}$ aus den Gleichungen $x_i = \sum_h \alpha^{(h)} x_i^{(h)}$ ergiebt; diese Gleichungen erhält man, indem man die Determinanten $(\mu+1)$-ter Ordnung der Matrix:

$$(x_i^{(k)}) \qquad \begin{pmatrix} k=0,1,2,\ldots,\mu \\ i=0,1,2,\ldots,n \\ x_i^{(0)}=x_i \end{pmatrix}$$

gleich Null setzt. Die Coefficienten dieser Gleichungen sind die Determinanten $(\mu-1)$ter Ordnung der Matrix

$$(x_i^{(k)}). \qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\ldots,\mu \\ i=0,1,\ldots,n \end{pmatrix}$$

Hierdurch, sowie durch die oben angegebene Eigenschaft, sich bei anderer Wahl der Punkte $x^{(k)}$ nur um einen gemeinsamen Factor zu ändern, werden die Determinanten μter Ordnung der Matrix $(x_i^{(k)})$ als homogene Coordinaten der $(\mu-1)$-fachen Mannigfaltigkeit charakterisirt.

Die aus der $i_0$ten, $i_1$ten, ..., $i_{\mu-1}$ten Colonne der Matrix $(x_i^{(k)})$ gebildete Determinante bezeichnen wir mit $x_{i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}}$. Da durch zweckmässige Wahl der μ Punkte $x^{(k)}$, oder der μ^2 Substitutionscoefficienten $\alpha_k^{(h)}$ über μ^2 Elemente der Matrix $(x_i^{(k)})$ beliebig verfügt werden kann, ohne die $\binom{n+1}{\mu}-1$ Determinanten-Quotienten $\frac{x_{i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}}}{x_{0,1,\ldots,\mu-1}}$ zu ändern, so sind diese Determinanten-Quotienten Functionen von nur $(n+1)\mu-\mu^2 = \mu(n+1-\mu)$ oder $\mu\nu$ unabhängigen Variabeln, $\mu+\nu = n+1$ gesetzt.

Zwischen diesen $\binom{n+1}{\mu}-1$ Determinanten-Quotienten bestehen daher $\binom{n+1}{\mu}-1-\mu\nu$ Relationen, oder zwischen den $\binom{n+1}{\mu}$ Determinanten selbst ebenso viel homogene Relationen.

Um diese Relationen aufzustellen, bezeichnen wir mit $\xi_i^{(k)}$ die ersten Minoren der Determinante

$$|x_i^{(k)}| = x_{0,1,\ldots,\mu-1}. \qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\ldots,\mu \\ i=0,1,\ldots,\mu-1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Multiplicationssatze ergiebt sich dann:

$$\begin{vmatrix} x_{i_0}^{(1)} & x_{i_1}^{(1)} & \ldots & x_{i_{\mu-1}}^{(1)} \\ x_{i_0}^{(2)} & x_{i_1}^{(2)} & \ldots & x_{i_{\mu-1}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i_0}^{(\mu)} & x_{i_1}^{(\mu)} & \ldots & x_{i_{\mu-1}}^{(\mu)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_0^{(1)} & \xi_1^{(1)} & \ldots & \xi_{\mu-1}^{(1)} \\ \xi_0^{(2)} & \xi_1^{(2)} & \ldots & \xi_{\mu-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_0^{(\mu)} & \xi_1^{(\mu)} & \ldots & \xi_{\mu-1}^{(\mu)} \end{vmatrix} = \left| \sum_l x_{i_k}^{(l)} \xi_h^{(l)} \right|; \quad (h, k = 0, 1, \ldots, \mu-1)$$

d. h.

$$x_{i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}} \cdot x_{0,1,\ldots,\mu-1}^{\mu-1} = \left| x_{0,1,\ldots,h-1,i_k,h+1,\ldots,\mu-1} \right|. \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, \mu-1)$$

Dieses sind die gesuchten Relationen.

Wir ermitteln zunächst ihre Anzahl. Die erste Relation, die wir erhalten, wenn wir alle Indices $i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}$ mit diesen $0, 1, \ldots, \mu-1$ übereinstimmend nehmen, wird:

$$x_{0,1,2,\ldots,\mu-1} \cdot x_{0,1,2,\ldots,\mu-1}^{\mu-1} = x_{0,1,2,\ldots,\mu-1}^{\mu},$$

also eine Identität. Die folgenden $\mu\nu$ Relationen, die wir erhalten, wenn wir alle Indices $i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}$ bis auf einen mit den Indices $0, 1, \ldots, \mu-1$ übereinstimmend nehmen, sind:

$$x_{0,1,\ldots,k_0-1,i_0,k_0+1,\ldots,\mu-1} \cdot x_{0,1,\ldots,\mu-1}^{\mu-1} = \left| x_{0,1,\ldots,h-1,k,h+1,\ldots,\mu-1} \right|, \quad \binom{h = 0, 1, \ldots, \mu-1}{k = 0, 1, \ldots, k_0-1, i_0, k_0+1, \ldots, \mu-1}$$

d. h.

$$= x_{0,1,\ldots,h-1,h,h+1,\ldots,\mu-1}^{\mu-1} \cdot x_{0,1,\ldots,k_0-1,i_0,k_0+1,\ldots,\mu-1},$$

also ebenfalls Identitäten. Die folgenden $\binom{\mu}{2} \cdot \binom{\nu}{2}$ Relationen, die wir erhalten, wenn wir die Indices $i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}$ bis auf zwei mit diesen $0, 1, \ldots, \mu-1$ übereinstimmend nehmen, also:

$$x_{0,1,\ldots,k_0-1,i_0,k_0+1,\ldots,k_1-1,i_1,k_1+1,\ldots,\mu-1} \cdot x_{0,1,\ldots,\mu-1}^{\mu-1} = \left| x_{0,1,\ldots,h-1,k,h+1,\ldots,\mu-1} \right|,$$
$$\binom{h = 0, 1, \ldots, \mu-1}{k = 0, 1, \ldots, k_0-1, i_0, k_0+1, \ldots, k_1-1, i_1, k_1+1, \ldots, \mu-1}$$

d. h.

$$= x_{0,1,\ldots,\mu-1}^{\mu-2} \cdot \begin{vmatrix} x_{0,1,\ldots,k_0-1,i_0,k_0+1,\ldots,\mu-1} & x_{0,1,\ldots,k_1-1,i_0,k_1+1,\ldots,\mu-1} \\ x_{0,1,\ldots,k_0-1,i_1,k_0+1,\ldots,\mu-1} & x_{0,1,\ldots,k_1-1,i_1,k_1+1,\ldots,\mu-1} \end{vmatrix}$$

werden, da sich der Factor $x_{0,1,\ldots,\mu-1}^{\mu-2}$ forthebt, Relationen zweiter Ordnung. Ebenso erhalten wir $\binom{\mu}{3} \cdot \binom{\nu}{3}$ Relationen dritter Ordnung, u. s. w. Im Ganzen ergeben sich also

$$1 + \binom{\mu}{1} \cdot \binom{\nu}{1} + \binom{\mu}{2} \cdot \binom{\nu}{2} + \cdots = \binom{n+1}{\mu}$$

Relationen, von denen jedoch die ersten $1 + \mu\nu$ reine Identitäten waren, so dass $\binom{n+1}{\mu} - 1 - \mu\nu$ Relationen übrig bleiben. Dass dieses System ein System von $\binom{n+1}{\mu} - 1 - \mu\nu$ unabhängigen Relationen ist, geht sofort daraus hervor, dass in jeder der Relationen eine Grösse, nämlich die auf der linken Seite stehende $x_{i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}}$ vorkommt, die in keiner der übrigen enthalten ist.

Denn die Indices $i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}$ unterscheiden sich in mindestens zweien von den Indices $0, 1, \ldots, \mu-1$, während die auf den rechten Seiten der Relationen vorkommenden Grössen $x_{0,1,\ldots,h-1,k,h+1,\ldots,\mu-1}$ nur in einem Index von $x_{0,1,\ldots,\mu-1}$ verschieden sind.

Das Relationensystem ist vom Geschlecht Null, so dass, wenn für eine ebene $(\mu-1)$-fache Mannigfaltigkeit nur die nothwendige Anzahl von $1+\mu\nu$ homogenen Coordinaten gegeben ist, sich die übrigen aus diesen rational, also eindeutig ergeben.

Die Dimension des Systemes ist:

$$2^{\binom{\mu}{2}\cdot\binom{\nu}{2}}.3^{\binom{\mu}{3}\cdot\binom{\nu}{3}}\ldots = \Pi_k^{\binom{\mu}{k}\cdot\binom{\nu}{k}}. \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

Dieselbe hat eine einfache anzahlgeometrische Bedeutung.

Es mögen $y_{i_\mu,i_{\mu+1},\ldots,i_n}$ die $\binom{n+1}{\nu}$ Coordinaten einer $(\nu-1)$-fachen ebenen Mannigfaltigkeit sein. Die Gleichung

$$\Sigma x_{i_0,i_1,\ldots,i_{\mu-1}}\cdot y_{i_\mu,i_{\mu+1},\ldots,i_n} = 0,$$

wo die Summation sich auf alle Möglichkeiten, die Indices $0, 1, \ldots, n$ combinatorisch in zwei Gruppen $i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}$ und $i_\mu, i_{\mu+1}, \ldots, i_n$ zu zerlegen, bezieht oder, was dasselbe ist, die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{(\mu)} & x_1^{(\mu)} & \ldots & x_n^{(\mu)} \\ y_0^{(1)} & y_1^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_0^{(\nu)} & y_1^{(\nu)} & \ldots & y_n^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0$$

bedeutet das Verschwinden eines durch μ Punkte der x-Mannigfaltigkeit und ν Punkte der y-Mannigfaltigkeit bestimmten Prismatoids (nach *Kroneckers* Terminologie), d. h. sie bedeutet das Sich-Schneiden der x-Mannigfaltigkeit und der y-Mannigfaltigkeit. Auch wenn man die Bedingung für das Vorhandensein eines Schnittpunktes, d. h. für die Auflösbarkeit des Gleichungssystemes:

$$x_i = \sum_h \alpha^{(h)} x_i^{(h)} = \sum_k \beta^{(k)} y_i^{(k)}, \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots,\mu \\ k=1,2,\ldots,\nu \\ i=0,1,\ldots,n \end{pmatrix}$$

aufsucht, wird man auf die obige Gleichung geführt.

Durch $\mu\nu$ solcher Gleichungen:

$$\Sigma x_{i_0,i_1,\ldots,i_{\mu-1}}\cdot y^{(h)}_{i_\mu,i_{\mu+1},\ldots,i_n} = 0 \qquad (h=1,2,\ldots,\mu\nu)$$

werden, in Verbindung mit den für die $\binom{n+1}{\mu}$ Grössen $x_{i_0, i_1, \ldots, i_{\mu-1}}$ identisch bestehenden $\binom{n+1}{\mu}-1-\mu\nu$ homogenen Relationen die Verhältnisse dieser Grössen, also diejenige x-Mannigfaltigkeit bestimmt, welche die $\mu\nu$ y-Mannigfaltigkeiten schneidet. Also gilt der Satz:

In einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit giebt es

$$\Pi_k \binom{\mu}{k}^{\binom{\nu}{k}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ebene $(\mu-1)$-fache Mannigfaltigkeiten, welche $\mu\nu$ gegebene $(\nu-1)$-fache ebene Mannigfaltigkeiten schneiden.

Ueber Systeme von Functionen reeller Variabeln.

(Von Herrn *Paul Stäckel* in Halle a. S.)

1.

Die folgende Untersuchung knüpft an einen der Sätze an, welche *Sturm* in seinem bekannten *Mémoire sur les Équations différentielles linéaires du second ordre**) für die Nullstellen von Functionen einer reellen Variabeln entwickelt hat, die durch eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung definirt werden. Das Theorem, um welches es sich handelt und welches im § XIV dieser Abhandlung ausgesprochen ist, lässt sich so formuliren: Es seien y_1 und y_2 zwei linear unabhängige Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy = 0;$$

wenn dann in dem Intervalle $x=(a...b)$ der Ausdruck

$$u = e^{-\int P dx}$$

endlich und von Null verschieden ist, so alterniren darin die Nullstellen der beiden Functionen y_1 und y_2 von x, das heisst zwischen je zwei Nullstellen einer der Functionen liegt stets eine, aber auch nur eine Nullstelle der anderen Function. Dieser Satz ist übrigens in die Lehrbücher übergegangen; *Sturm* hat ihn in seinen Cours d'analyse**) aufgenommen, und auch in *Jordans* Cours d'analyse***) hat er Platz gefunden.

Es scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, *dass das eben ausgesprochene Theorem in Wahrheit mit der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nichts zu thun hat, dass es vielmehr*

*) Journal de mathématiques pures et appliquées, t. I, S. 106—186, 1836; diese Abhandlung war jedoch schon im September 1833 der Pariser Akademie vorgelegt worden.

**) Cours d'analyse de l'École polytechnique, cinquième édition, t. II, S. 139.

***) Cours d'analyse de l'École polytechnique, t. III, S. 402, 1887.

eine Eigenschaft ausspricht, welche jedem Systeme von zwei Functionen einer reellen Veränderlichen zukommt, sobald diese und ihre ersten Ableitungen gewisse Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit erfüllen, während die Existenz von zweiten Ableitungen der betrachteten Functionen ganz gleichgültig bleibt. Bei einer solchen Auffassungsweise aber ordnet sich dieser Satz in die Theorieen über Systeme von Functionen ein, welche *Kronecker* in Vorlesungen und Abhandlungen*) entwickelt hat, und es wird möglich, *ihm ein entsprechendes Theorem für Systeme von $n+1$ Functionen von n reellen Veränderlichen an die Seite zu stellen.*

2.

Es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei reelle Functionen der reellen Veränderlichen x, welche in dem Intervalle $x=(a\dots b)$ eindeutig, endlich und stetig sind. Für dieselben Werthe von x sollen diese Functionen differentiirbar sein und ihre Ableitungen $f_1'(x)$ und $f_2'(x)$ endliche Werthe besitzen. Bildet man dann den Ausdruck:

$$\varDelta(x) = f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x),$$

und stellt sich heraus, dass $\varDelta(x)$ in dem Intervalle $x=(a\dots b)$ endlich ist und sein Vorzeichen nicht wechselt, so lässt sich zeigen, dass die Nullstellen der beiden Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in diesem Intervalle alterniren.

Verschwindet nämlich in dem Intervalle $x=(a\dots b)$ etwa $f_1(x)$ für $x=\alpha$ und $x=\beta$, aber für keinen der dazwischen liegenden Werthe von x, so ist zunächst wegen der Endlichkeit von $f_2'(x)$:

$$\varDelta(\alpha) = -f_2(\alpha)f_1'(\alpha),$$
$$\varDelta(\beta) = -f_2(\beta)f_1'(\beta),$$

und daher müssen $f_1'(\alpha)$ und $f_1'(\beta)$ endliche von Null verschiedene Werthe haben. Nun gelten aber für hinreichend kleine Werthe von h die Gleichungen:

$$f_1(\alpha+h)-f_1(\alpha) = hf_1'(\alpha+\vartheta h),$$
$$f_1(\beta+h)-f_1(\beta) = hf_1'(\beta+\vartheta' h),$$

wo ϑ und ϑ' positve oder negative echte Brüche bedeuten**), mithin muss

*) Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln, Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1869, S. 159 und S. 668. Ueber die Charakteristik von Functionen-Systemen, ebendaselbst, Jahrgang 1878, S. 145.

**) Dass die Formel $f(\alpha+h)-f(\alpha)=hf'(\alpha+\vartheta h)$ für hinreichend kleine Werthe von h gilt, sobald man weiss, dass $f'(x)$ zu beiden Seiten von $x=\alpha$ endlich ist, hat *Jordan* a. a. O. t. III, S. 582 gezeigt.

$f_1(x)$ für $x=\alpha$ und für $x=\beta$ das Vorzeichen wechseln, und $f_1'(\alpha)$ und $f_1'(\beta)$ haben entgegengesetztes Vorzeichen. Es ist also, wenn man nach *Kroneckers* Vorgang*) mit

$$\operatorname{sgn} z$$

das Vorzeichen von z bezeichnet:

$$\operatorname{sgn} f_1'(\alpha) = -\operatorname{sgn} f_1'(\beta).$$

Andererseits hat man der Voraussetzung nach:

$$\operatorname{sgn} \varDelta(\alpha) = \operatorname{sgn} \varDelta(\beta),$$

oder, was dasselbe ist:

$$\operatorname{sgn} f_2(\alpha) f_1'(\alpha) = \operatorname{sgn} f_2(\beta) f_1'(\beta),$$

und daher ist auch:

$$\operatorname{sgn} f_2(\alpha) = -\operatorname{sgn} f_2(\beta).$$

Hieraus aber folgt sofort, dass $f_2(x)$ in dem Intervalle $x=(\alpha\ldots\beta)$ mindestens einmal verschwindet, und da dieselbe Betrachtung unter Bevorzugung von $f_2(x)$ durchgeführt werden kann, so ergiebt sich weiter, dass nur *eine* Nullstelle von $f_2(x)$ in diesem Intervalle vorhanden ist.

Von diesem Satze lässt sich folgende Anwendung machen. Besitzen die Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für die betrachteten Werthe von x auch zweite Ableitungen $f_1''(x)$ und $f_2''(x)$, so genügen sie der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2y}{dx^2} & \dfrac{dy}{dx} & y \\ f_1''(x) & f_1'(x) & f_1(x) \\ f_2''(x) & f_2'(x) & f_2(x) \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy = 0.$$

Soll für $y_1=f_1(x)$ und $y_2=f_2(x)$ das oben erwähnte Theorem von *Sturm* gelten, so muss:

$$e^{-\int P dx}$$

für $x=(a\ldots b)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth haben. Diese

*) Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Sitzungsberichte der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1884, S. 519.

Bedingung aber ist vermöge der Relation

$$f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x) = c.e^{-\int P dx},$$

in welcher c eine von Null verschiedene Constante bedeutet, identisch mit der Forderung, welche vorher für $\Delta(x)$ aufgestellt wurde.

3.

Der eben bewiesene Satz über die Nullstellen von zwei Functionen einer reellen Veränderlichen x lässt sich verallgemeinern, wenn man ihn auffasst als den Ausdruck einer Beziehung zwischen den drei Curven:

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad y = 0.$$

Durchwandert man nämlich die Gerade $y = 0$, indem man beständig mit wachsendem x fortgeht, und markirt die Stellen, an welchen diese Gerade von den beiden anderen Curven geschnitten wird, so besagt jener Satz, dass in jedem Intervalle $x = (a...b)$, in welchem $\Delta(x)$ endlich und von Null verschieden ist, nothwendig die so markirten Stellen alterniren. Statt der Geraden $y = 0$ kann man aber irgend eine Curve $y = f_3(x)$ in der xy-Ebene nehmen und nach den Beziehungen fragen, welche zwischen den Schnittpunkten dieser drei Curven bestehen.

Es seien also drei Functionen von zwei reellen Veränderlichen x und y gegeben, welche mit $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ und $f_3(x, y)$ bezeichnet werden sollen; interpretirt man x und y als Punktcoordinaten in einer Ebene, so stellen die Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ drei Curven dar. Jetzt wandere man auf einer dieser Curven, etwa $f_1 = 0$, und markire die Stellen, an denen die Curve von den beiden anderen geschnitten wird. Es wird sich dann darum handeln, aus f_1, f_2 und f_3 einen Ausdruck zu bilden, welcher die Eigenschaft hat, *dass die Schnittpunkte der beiden Curven mit* $f_1 = 0$ *alterniren, solange dieser Ausdruck einen endlichen von Null verschiedenen Werth behält.*

Zu diesem Zwecke ist es zunächst nöthig, den Begriff des Durchwanderns einer Curve, welcher geometrisch klar ist, analytisch zu präcisiren. Man bedarf dazu eines *Fortgangsprincips*, d. h. einer Regel, welche für jeden Punkt x, y der Curve angiebt, in welcher Richtung man bei der Durchwanderung der Curve weitergehen soll. Ein solches Fortgangsprincip lässt sich auf Grund *Kronecker*scher Ideen so formuliren. Ebenso wie der Fortgang auf der Curve $y = 0$ durch ihre Beziehung zu den Geraden

$x = \text{const.}$ geregelt wird, so ordne man, wenn es sich um die Durchwanderung der Curve $f(x, y) = 0$ handelt, ihr willkürlich eine Curvenschaar $g(x, y) = \text{const.}$ zu und bilde den Ausdruck:

$$D(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Dann hat man von einem Punkte x, y aus stets so weiter zu gehen, dass

$$D(x, y).dg > 0$$

ist. Es ist klar, dass man auf diese Weise niemals von einem Punkte zu dem eben durchlaufenen zurückgelangt und dass diese Regel nur dann versagt, wenn $D(x, y)$ verschwindet. Durch geeignete Wahl der willkürlichen Hilfscurven $g(x, y) = \text{const.}$ kann man aber stets erreichen, dass dies nur eintritt, wenn gleichzeitig $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwinden. Die Doppelpunkte der Curve $f(x, y) = 0$ erfordern also eine besondere Behandlung. Man wird bei ihnen so zu verfahren haben, dass man bis zu einem solchen Punkte herangeht und dann, ihn überspringend, auf einen Zweig der Curve übergeht, welcher noch nicht durchlaufen worden ist.

Es lässt sich zeigen, dass die Hilfscurven $g(x, y) = \text{const.}$ keinen Einfluss auf die Art des Fortgehens haben; sie ermöglichen eben nur den analytischen Ausdruck des Fortgangsprincips. Nimmt man nämlich eine zweite Schaar von Hilfscurven $h(x, y) = \text{const.}$, so ist beim Durchwandern der Curve $f(x, y) = 0$ gleichzeitig:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot dy &= dg, \\ \frac{\partial h}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial h}{\partial y}\cdot dy &= dh; \end{aligned}$$

hieraus aber folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & dg \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & dh \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot dh = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot dg,$$

und diese Gleichung zeigt, dass die Bedingungen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot dg > 0$$

und

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot dh > 0$$

ganz gleichbedeutend sind.

Das im Vorstehenden entwickelte Fortgangsprincip soll kurz als *Kronecker*sches Fortgangsprincip bezeichnet werden.

4.

Es seien drei Functionen f_1, f_2 und f_3 der reellen Veränderlichen x und y gegeben, welche in einem gewissen Bereiche $\mathfrak{B}$ der xy-Ebene eindeutig, endlich und stetig sind. Für dieselben Werthsysteme x, y sollen sich diese Functionen nach x und y differentiiren lassen, und ihre ersten partiellen Ableitungen nach diesen Veränderlichen sollen endliche Werthe besitzen. Wenn dann in dem Bereiche $\mathfrak{B}$ der Ausdruck

$$\varDelta(x, y) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix}$$

endlich und von Null verschieden ist, so gilt folgender Satz: Durchwandert man, ohne aus dem Bereiche $\mathfrak{B}$ herauszutreten, gemäss dem *Kronecker*schen Fortgangsprincipe eine der drei Curven $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ und markirt die Stellen, an denen diese Curve von den beiden anderen getroffen wird, so alterniren diese Stellen, d. h. zwischen zwei Schnittpunkten der durchwanderten Curve und der zweiten Curve liegt stets ein und nur ein Schnittpunkt derselben Curve mit der dritten und zwischen zwei Schnittpunkten mit der dritten liegt stets genau einer mit der zweiten Curve.

Der Beweis wird ähnlich wie vorher geführt. Wenn f_1 und f_2 für den Punkt $x = \alpha$, $y = \beta$ verschwinden, so ist an dieser Stelle der Werth jener Determinante:

$$\varDelta(\alpha, \beta) = \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cdot f_3\right]_{x=\alpha, y=\beta}.$$

Wandert man jetzt auf der Curve $f_1 = 0$ so, dass gemäss dem *Kronecker*schen

Fortgangsprincipe stets

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)df_2 > 0$$

ist, und gelangt an eine Stelle $x=\alpha'$, $y=\beta'$, an welcher zum ersten Male wieder f_2 verschwindet, so ist entsprechend der Werth von $\varDelta$ an dieser Stelle:

$$\varDelta(\alpha',\beta') = \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cdot f_3\right]_{x=\alpha',y=\beta'}.$$

Hieraus aber folgt, dass f_2 an den beiden Stellen $x=\alpha$, $y=\beta$ und $x=\alpha'$, $y=\beta'$ mit Zeichenwechsel verschwindet, und dass daher df_2 an diesen beiden Stellen entgegengesetztes Vorzeichen hat. Das Fortgangsprincip zeigt dann, dass dasselbe für die Werthe der Determinante

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

gilt, und hieraus erschliesst man vermöge der Gleichung

$$\operatorname{sgn}\varDelta(\alpha,\beta) = \operatorname{sgn}\varDelta(\alpha',\beta'),$$

dass

$$\operatorname{sgn}f_3(\alpha,\beta) = -\operatorname{sgn}f_3(\alpha',\beta')$$

ist und dass daher f_3 innerhalb der Curvenstrecke zwischen (α,β) und (α',β') verschwinden muss; dass aber auch nur eine Nullstelle von f_3 in diesem Intervalle vorhanden ist, ergiebt sich unmittelbar aus der Symmetrie der Determinante $\varDelta$ in Bezug auf die drei Functionen f_1, f_2 und f_3.

Dieselbe Symmetrie zeigt auch, dass es gleichgültig ist, auf welcher der Curven man wandert, dass also die Schnittpunkte von irgend zwei der drei Curven mit der dritten sich alternirend verhalten.

5.

Ganz entsprechende Betrachtungen gelten für ein System von $n+1$ Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$ von n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$, wenn man diese Variabeln als Coordinaten eines n-fach ausgedehnten ebenen Raumes interpretirt. Greift man aus den $n+1$ Functionen $n-1$, etwa f_1, $f_2, \dots, f_{n-1}$, heraus, so wird durch

$$f_1=0,\quad f_2=0,\quad \dots,\quad f_{n-1}=0$$

eine Curve in diesem Raume bestimmt. Für die Durchwanderung einer



solchen Curve gilt dann als *Kronecker*sches Fortgangsprincip, dass beständig

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot dg > 0$$

sein muss. Hierbei bedeutet g eine willkürliche Hilfsfunction, deren Einführung, wie man sich leicht überzeugt, zwar zur analytischen Formulirung des Fortgangsprincips nothwendig, aber ohne jeden Einfluss auf die Art des Fortganges ist.

Nimmt man jetzt an, dass $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ jenes n-fach ausgedehnten ebenen Raumes eindeutig, endlich und stetig sind, dass für denselben Bereich die Differentiation nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ statthaft ist, und dass die ersten partiellen Ableitungen der Functionen endliche Werthe haben, so gilt folgender Satz: *In dem Bereiche $\mathfrak{B}$ sei die Determinante*

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

endlich und von Null verschieden. Greift man dann irgend welche $n-1$ der $n+1$ Functionen willkürlich heraus und markirt auf der Curve, welche durch das gleichzeitige Verschwinden dieser Functionen definirt ist, diejenigen Stellen, in denen die beiden anderen Functionen verschwinden, so alterniren diese Stellen in dem oben angegebenen Sinne. Da der Beweis des allgemeinen Satzes sich ganz ähnlich gestaltet wie der Beweis für den speciellen Fall $n = 3$, so scheint es nicht erforderlich, ihn hier durchzuführen.

Es möge zum Schlusse noch darauf hingewiesen werden, dass die Determinante $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bereits bei den *Kronecker*schen Untersuchungen über die *Charakteristik eines Functionensystemes* auftritt, und zwar kommt gerade das Vorzeichen von Δ an den Stellen, wo n der $n+1$ Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ verschwinden, bei der Definition der Charakteristik in Betracht.

Geometrische Untersuchungen.

(Von Herrn *H. Schmidt* in Stuttgart.)

Zweiter Abschnitt.

Zur Sphärik.

1. Schon *Bolyai* und *Lobatschewsky* haben dargethan, dass die sphärische Trigonometrie unabhängig ist von dem Euklidischen Parallelenaxiom. Vielleicht ist es aber nicht ohne Interesse, wenn im Folgenden nachgewiesen wird, dass die sphärische Trigonometrie ebenso wie die Sphärik unabhängig ist überhaupt von jeder planimetrischen Construction, dass sie sich in einfacher Weise ableiten lässt aus der im I. Abschnitte*) gefundenen Eigenschaft der Kugelfläche bzw. der Hauptfläche überhaupt, wonach nämlich auf jeder Hauptfläche durch zwei Punkte eine und im allgemeinen nur eine Hauptlinie, die wir Richtlinie genannt haben, bestimmt ist von der Art, dass sie auf der Hauptfläche um einen ihrer Punkte so gedreht werden kann, dass sie mit sich selbst in umgekehrter Richtung in Deckung kommt. Für die Kugelfläche ist diese Linie der Hauptkreis, der sie in zwei congruente Hälften zerlegt.

2. Was die wichtigsten elementaren Sätze der Sphärik anlangt (Congruenz und Symmetrie von Figuren, die durch Hauptkreisstrecken begrenzt sind, die Sätze über das gleichschenklige Dreieck, die Beziehungen zwischen Polarfiguren u. s. w.), so kann ich dieselben hier ohne weiteres voraussetzen, da sie sich, nachdem einmal die Existenz des Hauptkreises nachgewiesen worden, einfach ableiten lassen. Nur einige Sätze, die in engerem Zusammenhang mit der folgenden Entwickelung stehen, mögen hier hervorgehoben werden.

Es ist bekannt, dass, wenn einem gegebenen Kreise auf der Kugelfläche ein reguläres n-eck um- und ein solches von gleicher Seitenzahl

*) Vgl. diesen Band, Heft 2, S. 112.

einbeschrieben werden soll. die Seitenzahl n so gross angenommen werden kann, dass der Unterschied zwischen den Umfängen und ebenso der Unterschied zwischen den Flächen der beiden Vielecke beliebig klein wird. Ist der sphärische Radius des Kreises $= x$, so wollen wir durch $f(x)$ die Grösse bezeichnen, in welche der Umfang des um- und einbeschriebenen n-ecks übergeht, wenn n ins Unendliche wächst. ebenso durch $F(x)$ den Ausdruck für die Flächen der beiden n-ecke bei unendlich grossem n, wobei Fx offenbar nichts anderes ist als die Kreisfläche selbst. Die Fläche eines sphärischen n-ecks denken wir uns hierbei gemessen durch die Grundlinie des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, welchem das n-eck flächengleich ist. Setzt man nun den Umfang des Hauptkreises $= 2p$, so hat man vermöge der Beziehungen zwischen Polarfiguren sofort die Gleichung

$$f(x)+F(\tfrac{1}{2}p-x) = 2p.$$

3. Wir stellen uns nun, behufs Entwickelung der Functionen fx und Fx, zunächst die Aufgabe, die *erste Ableitung derselben*, d. h. den Werth der Ausdrücke

$$\frac{f(x+k)-f(x)}{k} \quad \text{und} \quad \frac{F(x+k)-F(x)}{k}$$

für ein verschwindendes k, zu bestimmen. Zur Lösung dieser Aufgabe bieten sich uns *drei* verschiedene Wege dar.

I. Wir denken uns die beiden Kreise mit den sphärischen Radien x und $x+k$ concentrisch um den Punkt O als Mittelpunkt beschrieben, so dass $F(x+k)-F(x)$ durch die zwischen ihnen enthaltene Kreiszone dargestellt wird. Ein Radius OAA' schneide den Kreis $F(x)$ in A, den Kreis $F(x+k)$ in A'. Von A aus denke man sich im Kreise $F(x)$ die Seite AB eines regulären n-ecks von sehr grosser Seitenzahl und den Radius OB gezogen, der den Kreis $F(x+k)$ in B' trifft. Die n Vierecke $ABB'A'$, die man auf solche Weise erhält, denke man sich nun der Länge nach, d. h. mit der Seite $k = AA'$, einem Hauptkreise entlang aneinandergelegt, so erhält man einen Gürtel von der Länge nk, der also den Hauptkreis so oft umschlingt als $2p$ in nk enthalten ist. Der Flächeninhalt dieses Gürtels ist, wie sich in aller Strenge beweisen lässt, grösser als der einer gleich oft den Hauptkreis umschlingenden Kugelzone von der Breite $AB = a$ und kleiner als der einer Kugelzone von der Breite $A'B' = a'$. Der Inhalt einer Kugelzone von der Breite a ist aber $= 2p-F(\frac{1}{2}p-a) = f(a)$. Demnach erhält man für jenen Gürtel die Grenzen $f(a)\cdot\frac{nk}{2p}$ und $f(a')\cdot\frac{nk}{2p}$ oder $\frac{f(a)}{a}\cdot\frac{na.k}{2p}$ und

$\frac{f(a')}{a'} \cdot \frac{na.k}{2p}$. Wird n nun unendlich gross, so gehen die beiden n-ecke in die Kreise $F(x)$ und $F(x+k)$ über und man hat $na = f(x)$, $na' = f(x+k)$ also auch

$$\frac{f(a')}{a'} \cdot \frac{f(x+k).k}{2p} > F(x+k) - F(x) > \frac{f(a)}{a} \cdot \frac{f(x).k}{2p}.$$

Hierbei sind a' und a unendlich klein und $\frac{f(a')}{a'} = \frac{f(a)}{a}$ erhält einen bestimmten Werth, dessen Grenzen sich jetzt schon so weit feststellen lassen, dass $8 > \frac{f(a)}{a} > 4$, denn für ein sehr kleines x wird $f(x) > 4x$, und andererseits $\frac{f(x)}{4} < 2x$. Wir setzen also $\lim \frac{f(a')}{a'}$ für verschwindendes $a' = A$. So erhalten wir

$$\frac{A}{2p} \cdot kf(x+k) > F(x+k) - F(x) > \frac{A}{2p} kf(x)$$

oder

$$\frac{A}{2p} f(x+k) > \frac{F(x+k) - F(x)}{k} > \frac{A}{2p} f(x)$$

und hieraus für $k = 0$

$$F'(x) = f(x) \cdot \frac{A}{2p}.$$

II. In den beiden concentrischen Kreisen $F(x)$ und $F(x+k)$ denken wir uns wieder reguläre Vielecke mit sehr grosser Seitenzahl beschrieben $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ und zwar so, dass die Mittellothe auf den Seiten AB, BC, ... die Ecken des Vielecks $A'B'\ldots$ treffen. Dann begrenzen die beiden Vielecke eine Figur, die aus n congruenten Dreiecken mit der Basis AB und ebenso vielen Dreiecken mit der Basis $A'B'$ besteht. Construirt man nun einen Kreis, der die Länge der Schenkel dieser Dreiecke zum Radius hat, so möge sich in diesen die AB m-mal und die $A'B'$ m'-mal als Seite eintragen lassen. Bezeichnet man die Fläche des in diesen Kreis einbeschriebenen regulären m-ecks mit M und des m'-ecks mit M', so erhält man für die Fläche der Figur $ABC\ldots A'B'C'\ldots$ den Ausdruck

$$M \cdot \frac{n}{m} + M' \cdot \frac{n}{m'} = M \cdot \frac{n.AB}{m.AB} + M' \cdot \frac{n.A'B'}{m'.A'B'};$$

für ein unendliches n gehen aber offenbar M und M' in $F(k)$ über, ferner wird

$$\frac{n.AB}{m.AB} = \frac{f(x)}{f(k)} \quad \text{und} \quad \frac{n.A'B'}{m'.A'B'} = \frac{f(x+k)}{f(k)},$$

endlich die Figur $ABC\ldots A'B'C'\ldots = F(x+k)-F(x)$. Daher hat man

$$F(x+k)-F(x) = F(k)\left(\frac{f(x)}{f(k)}+\frac{f(x+k)}{f(k)}\right) = (f(x)+f(x+k))\cdot\frac{F(k)}{f(k)}$$

oder

$$\frac{F(x+k)-F(x)}{k} = (f(x)+f(x+k))\cdot\frac{F(k)}{kf(k)}\cdot$$

Für $k=0$ wird $\frac{F(k)}{kf(k)}$ einer Constanten gleich, die wir mit C bezeichnen wollen, und man hat

$$F'(x) = f(x).C$$

oder, wenn wir $C=\frac{A}{2p}$ setzen, $F'(x)=f(x)\cdot\frac{A}{2p}$ wie oben.

Diese Gleichung genügt nun für die ganze weitere Entwickelung. Da nämlich

$$F(x) = 2p-f(\tfrac{1}{2}p-x),$$

so hat man auch

$$F'(x) = f'(\tfrac{1}{2}p-x)$$

oder

$$f'(\tfrac{1}{2}p-x) = f(x)\cdot\frac{A}{2p}$$

und hieraus

$$f'(x) = f(\tfrac{1}{2}p-x)\cdot\frac{A}{2p}\cdot$$

Bildet man die höheren Ableitungen, so erhält man

$$f''(x) = -f'(\tfrac{1}{2}p-x)\cdot\frac{A}{2p} = -f(x)\cdot\left(\frac{A}{2p}\right)^2,$$

$$f'''(x) = -f'(x)\cdot\left(\frac{A}{2p}\right)^2 = -f(\tfrac{1}{2}p-x)\cdot\left(\frac{A}{2p}\right)^3,$$

$$f^{IV}(x) = \quad f'(\tfrac{1}{2}p-x)\cdot\left(\frac{A}{2p}\right)^3 = f(x)\cdot\left(\frac{A}{2p}\right)^4\cdot$$

Und nun beginnt die Periode von neuem, nur dass der Coefficient $\left(\frac{A}{2p}\right)$ mit höheren Exponenten behaftet erscheint.

Für die Ableitungen von $F(x)$ ergeben sich aus der ersten, $F'(x)$, ähnliche Ausdrücke, nämlich

$$F''(x) = f(\tfrac{1}{2}p-x)\cdot\left(\frac{A}{2p}\right)^2,$$

$$F'''(x) = -f(x)\cdot\left(\frac{A}{2p}\right)^3,$$

$$F^{IV}(x) = -f(\tfrac{1}{2}p-x)\cdot\left(\frac{A}{2p}\right)^4,$$

$$F^{V}(x) = f(x)\cdot\left(\frac{A}{2p}\right)^5, \quad \text{u. s. w.}$$

Nun ist $f(0)$ offenbar $=0$, ebenso $F(0)=0$, mithin (aus der Gleichung $f(x)+F(\frac{1}{2}p-x)=2p$)

$$f(\tfrac{1}{2}p) = 2p = F(\tfrac{1}{2}p),$$

für $x=0$ erhalten also die obigen Ableitungen folgende Werthe:

$$F'(0)=0, \qquad f'(0)=2p\frac{A}{2p},$$

$$F''(0)=2p\left(\frac{A}{2p}\right)^2, \qquad f''(0)=0,$$

$$F'''(0)=0, \qquad f'''(0)=-2p\left(\frac{A}{2p}\right)^3,$$

$$F^{IV}(0)=-2p\left(\frac{A}{2p}\right)^4, \qquad f^{IV}(0)=0,$$

$$F^{V}(0)=0, \qquad \ldots\ldots$$

Der *Taylor*sche Satz ergiebt hieraus

$$F(x) = 2p\left(\frac{x^2}{2}\left(\frac{A}{2p}\right)^2 - \frac{x^4}{2.3.4}\left(\frac{A}{2p}\right)^4 + \frac{x^6}{2\ldots6}\left(\frac{A}{2p}\right)^6 \mp\cdots\right),$$

$$f(x) = 2p\left(x\left(\frac{A}{2p}\right) - \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{A}{2p}\right)^3 + \frac{x^5}{2\ldots5}\left(\frac{A}{2p}\right)^5 \mp\cdots\right).$$

Die identische Gleichung

$$2f(x).f(\tfrac{1}{2}p-x)\cdot\frac{A}{2p} - 2f(\tfrac{1}{2}p-x).f(x)\cdot\frac{A}{2p} = 0$$

giebt ferner durch Integration

$$f^2(x)+f^2(\tfrac{1}{2}p-x) = C,$$

wobei der Werth der Constanten aus

$$C = f^2(0)+f^2(\tfrac{1}{2}p) = (2p)^2$$

gefunden wird.

Es lässt sich nun auch, wenn $f(x)=2py$ gegeben ist, x daraus bestimmen; es ist nämlich

$$y = \frac{f(x)}{2p},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2p}\cdot f'(x) = \frac{A}{4p^2}\cdot f(\tfrac{1}{2}p-x)$$
$$= \frac{A}{2p}\sqrt{1-y^2},$$

$$\frac{A}{2p} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dy}{dx}\left(1+\frac{y^2}{2}+\frac{3y^4}{2.4}+\cdots\right),$$
$$\frac{A}{2p}\cdot x = y+\frac{y^3}{2.3}+\frac{3y^5}{2.4.5}+\cdots.$$

Aus der Gleichung $f^2(x)+f^2(\frac{1}{2}p-x) = (2p)^2$ erhält man ferner $f(\frac{1}{4}p) = 2p.\sqrt{\frac{1}{2}}$; setzt man also $y = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist $x = \frac{1}{4}p$ und man hat

$$\frac{A}{8} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2.3.2}+\frac{3}{2.4.5.2^2}+\cdots\right).$$

Diese Reihe ist convergent, und man erhält daraus den bekannten Werth $A = 2.3,14159... = 2\pi$.

Da wir nun, so lange wir es nur mit *einer* Kugelfläche zu thun haben, als Maasseinheit für sphärische Linien jede beliebige Grösse annehmen können, so wollen wir die Länge des Hauptkreises nunmehr $= 2\pi$ setzen, wodurch die Constante $\frac{A}{2p} = 1$ wird.

Führen wir die aus der Analysis bekannten Ausdrücke

$$\sin x = x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2...5}\mp\cdots$$

und

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2...6}\mp\cdots$$

ein, so erhalten wir

$$f(x) = 2\pi\sin x,\quad F(x) = 2\pi(1-\cos x).$$

Die Uebertragung dieser Formeln auf den Fall, wenn der Hauptkreis $= 2p$ gegeben ist, bietet keine Schwierigkeit.

Noch ist zu erwähnen, dass die Formeln für $\sin(x\pm y)$, $\cos(x\pm y)$ aus den gefundenen sich ohne Schwierigkeit ableiten lassen, sei es durch Reihentwickelung, sei es mittelst der bekannten Ausdrücke von $\sin x$ und $\cos x$ in Potenzen von e (der Basis des natürlichen Logarithmensystemes)

mit imaginären Exponenten, oder endlich mit Hülfe von Ableitungsgleichungen. Letztere Entwickelung mag hier folgen.

Aus den oben gefundenen Ausdrücken für $f'(x)$, $f''(x)$, ... geht sogleich hervor, dass

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d\sin y}{dx} = \cos y\cdot\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d\cos y}{dx} = -\sin y\cdot\frac{dy}{dx},$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin y}{dx} : \cos y = -\frac{d\cos y}{dx} : \sin y.$$

Man hat ferner

$$\frac{d\sin(x+y)}{dx} = \cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right),$$

$$\frac{d\cos(x+y)}{dx} = -\sin(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

oder

$$\cos(x+y) = \frac{d\sin(x+y)}{dx} - \frac{dy}{dx}\cdot\cos(x+y)$$

$$-\sin(x+y) = \frac{d\cos(x+y)}{dx} + \frac{dy}{dx}\cdot\sin(x+y).$$

Setzt man in die erste dieser Gleichungen den ersten, in die zweite den zweiten der oben gefundenen Werthe von $\frac{dy}{dx}$ ein, so erhält man

$$\cos(x+y).\cos y = \frac{d\sin(x+y)}{dx}\cos y - \frac{d\sin y}{dx}\cdot\cos(x+y),$$

$$-\sin(x+y).\sin y = \frac{d\cos(x+y)}{dx}\cdot\sin y - \frac{d\cos y}{dx}\cdot\sin(x+y).$$

Hieraus folgt

$$\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y = \frac{d\sin(x+y)}{dx}\cos y + \sin(x+y)\frac{d\cos y}{dx} - \frac{d\cos(x+y)}{dx}\cdot\sin y - \cos(x+y)\cdot\frac{d\sin y}{dx}$$

oder

$$\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y = \frac{d\{\sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y\}}{dx}.$$

Setzt man in die erste jener Gleichungen den zweiten, in die zweite den ersten Werth von $\frac{dy}{dx}$ ein, so erhält man

$$-\sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\sin y = \frac{d\{\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y\}}{dx}.$$

Man bemerkt alsbald die Uebereinstimmung der Art dieser Gleichungen mit den Eingangs aufgestellten:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x.$$

In der That hat man

$$[\sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y]^2 + [\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y]^2$$
$$= [\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y)].(\sin^2 y + \cos^2 y) = 1.$$

Setzt man also

$$\sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y = \sin z, \quad \cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y = \cos z,$$

wobei z irgend eine Function von x und y vorstellen kann, so hat man aus den beiden Gleichungen

$$\frac{d\sin z}{dx} = \cos z, \quad \frac{d\cos z}{dx} = -\sin z.$$

Da aber $\frac{d\sin z}{dx} = \cos z . \frac{dz}{dx}$, so muss $\frac{dz}{dx} = 1$ sein, mithin $z = x+a$. Der Werth des Ausdruckes $\sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\sin y$ ist also von y unabhängig $= \sin(x+a)$. Setzt man $y = 0$, so erhält man $\sin x = \sin(x+a)$, d. h. $a = 0$; mithin

$$\sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y = \sin x$$

und ebenso

$$\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y = \cos x.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\cos y$, die zweite mit $\sin y$ und addirt, so ergiebt sich

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Multiplicirt man die erste mit $-\sin y$, die zweite mit $\cos y$ und addirt, so erhält man

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Ebenso lassen sich, wenn man von $\sin(x-y)$ und $\cos(x-y)$ ausgeht, die Werthe dieser in $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ finden (auch direct aus den gefundenen Werthen, wenn man $x-y$ statt x setzt, wobei dann x statt $x+y$ zu setzen ist).

III. Der dritte Weg, den wir zur Lösung unserer Aufgabe, die erste Ableitung von $f(x)$ und $F(x)$ zu bestimmen, einschlagen können, führt unmittelbar auf die eben entwickelten Formeln. In zwei concentrische Kreise mit

den Radien x und $x+y$ denken wir zwei reguläre n-ecke mit sehr grosser Seitenzahl so einbeschrieben, dass die Mittellothe auf den Seiten des einen (in den Kreis $F(x)$ einbeschriebenen) durch die Ecken des anderen (in den Kreis $F(x+y)$ einbeschriebenen) gehen. Es sei O der Mittelpunkt der Kreise, AB eine Seite des dem Kreise $F(x)$ einbeschriebenen Vieleckes und C' der Punkt, in welchem das von O auf AB gefällte Loth den Kreis $F(x+y)$ trifft. Die Radien OA und OB sind alsdann offenbar auch Mittellothe auf den in C' zusammenstossenden Seiten $A'C'$ und $C'B'$ des in den Kreis $F(x+y)$ einbeschriebenen Vieleckes und mögen dieselben in D' und E' treffen. Den Inhalt des inneren Vieleckes bezeichnen wir durch $J(x)$, den des äusseren durch $J(x+y)$, $C'A$ sei $=k$. Wir beschreiben nun mit dem Radius k einen Kreis und tragen in denselben die Seite AB so oft ein, als es angeht, ebenso die Seite $A'C'$, ersteres sei m-mal, letzteres m'-mal der Fall, den Inhalt dieses dem Kreise $F(k)$ einbeschriebenen m-eckes bezeichnen wir durch M, denjenigen des m'-eckes durch M'.

Die Winkelsumme im Dreieck ABO ist nun $=\frac{J(x)}{n}$, folglich, da der Winkel bei O $=\frac{2\pi}{n}$, die Summe der beiden Winkel bei A und B $=\pi+\frac{J(x)}{n}-\frac{2\pi}{n}\cdot$ Im Dreieck $AC'B$ ist die Winkelsumme $=\frac{M}{m}$, der Winkel bei C' $=\frac{2\pi}{m}$, also die Summe der Winkel bei A und B $=\pi+\frac{M}{m}-\frac{2\pi}{m}\cdot$ Die Winkel $C'BE'$ und $D'AC'$ sind zusammen $=\frac{2\pi}{m_1}\cdot$ Demnach hat man

$$\pi+\frac{J(x)}{n}-\frac{2\pi}{n}+\pi+\frac{M}{m}-\frac{2\pi}{m}+\frac{2\pi}{m_1} = 2\pi$$

oder

$$\frac{J(x)}{n}-\frac{2\pi}{n}+\frac{M}{m}-\frac{2\pi}{m}+\frac{2\pi}{m_1} = 0$$

oder

$$J(x)-2\pi+\frac{M.n}{m}-\frac{2\pi.n}{m}+\frac{2\pi.n}{m_1} = 0$$

oder

$$J(x)-2\pi+\frac{M.n.AB}{m.AB}-\frac{2\pi.n.AB}{m.AB}+\frac{2\pi.n.A_1C_1}{m.A_1C_1} = 0.$$

Lässt man n unendlich gross werden, so wird $J(x)=F(x)$, der Kreis $F(k)=F(y)$, $M=F(y)$, $n.AB$ wird $=f(x)$, $m.AB=f(y)$, $n.A_1C_1=f(x+y)$

und $m_1.A_1C_1 = f(y)$. Man hat also

$$F(x)-2\pi+\frac{F(y).f(x)}{f(y)}-\frac{2\pi.f(x)}{f(y)}+\frac{2\pi.f(x+y)}{f(y)} = 0$$

oder

$$2\pi f(x+y) = f(y)(2\pi-F(x))+f(x)(2\pi-F(y)).$$

Setzt man, um der Gleichung eine einfachere Gestalt zu geben,

$$f(x+y)=2\pi\sin(x+y) \quad \text{und ebenso} \quad f(y)=2\pi\sin y, \quad f(x)=2\pi\sin x,$$

ferner

$$2\pi-F(x)=2\pi\cos x \quad \text{und} \quad 2\pi-F(y)=2\pi.\cos y,$$

so hat man

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

Betrachtet man den Winkel bei C' so hat man

$$\angle\, OC'D' = OC'A+AC'D'.$$

Nun ist

$$\angle\, OC'D' = \tfrac{1}{2}.\left(\pi+\frac{J(x+y)}{n}-\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$\angle\, OC'A = \tfrac{1}{2}.\frac{2\pi}{m},$$

$$\angle\, AC'D' = \tfrac{1}{2}.\left(\pi+\frac{M_1}{m_1}-\frac{2\pi}{m_1}\right),$$

also

$$\pi+\frac{J(x+y)}{n}-\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{m}+\pi+\frac{M_1}{m_1}-\frac{2\pi}{m_1}$$

oder

$$J(x+y)-2\pi = \frac{2\pi.n.AB}{m.AB}+\frac{M_1.n.A_1C_1}{m_1.A_1C_1}-\frac{2\pi.n.A_1C_1}{m_1.A_1C_1}.$$

Hieraus folgt, wenn man n unendlich gross setzt,

$$F(x+y)-2\pi = \frac{2\pi.f(x)}{f(y)}+\frac{F(y).f(x+y)}{f(y)}-\frac{2\pi.f(x+y)}{f(y)}$$

oder

$$2\pi.f(x) = f(x+y)(2\pi-F(y))-f(y)(2\pi-F(x+y)).$$

Setzt man hier $x+y=z$, also $x=z-y$, so erhält man

$$2\pi.f(z-y) = f(z)(2\pi-F(y))-f(y)(2\pi-F(z)),$$

und wenn man hier x statt z setzt,

$$2\pi f(x-y) = f(x)(2\pi-F(y))-f(y)(2\pi-F(x))$$

oder

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

Aus der Gleichung, die zwischen Polarfiguren besteht,

$$f(x) = 2\pi - F(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$

folgt nun sogleich

$$\sin x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x).$$

Setzt man also in den beiden Ausdrücken für $\sin(x+y)$ und $\sin(x-y)$ statt x $\frac{1}{2}\pi - x$, so erhält man sofort

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Aus den Formeln für $\sin(x \pm y)$ und $\cos(x \pm y)$ lassen sich aber bekanntlich $\frac{d \sin x}{dx}$ und $\frac{d \cos x}{dx}$ ohne Schwierigkeit ableiten.

4. Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks. Wir wollen die Hypotenuse durch z, die Katheten durch x und y, die der Hypotenuse anliegenden Winkel durch X und Y bezeichnen. Nimmt man z und X als gegeben an, so ist das Dreieck bestimmt und man kann z. B. die X gegenüberliegende Kathete x durch $\varphi(z, X)$ bezeichnen. Da für $X = 0$ auch $x = 0$ wird, so muss $\varphi(z, X)$, nach aufsteigenden Potenzen von X geordnet, folgende Form haben:

$$\varphi(z, X) = X^m . Z + X^{m'} . Z_1 + \cdots,$$

wobei Z, Z_1, ... Functionen von z sind.

Nun beschreibe man mit z als Radius einen Kreis, in welchen $2x$ als Sehne eingetragen sei. Theilt man den zugehörigen Centriwinkel $2X$ in n Theile, so ist die zum Winkel $\frac{2X}{n}$ gehörige Sehne $= 2\varphi\left(z, \frac{X}{n}\right)$, die Summe der n so gebildeten Sehnen $= 2n\varphi\left(z, \frac{X}{n}\right)$. Wird n unendlich gross, so wird dieser Ausdruck offenbar $= 2X \sin z$, also

$$2n \cdot \frac{X^m}{n^m} \cdot Z + 2n \cdot \frac{x^{m'}}{n^{m'}} \cdot Z_1 + \cdots = 2X \sin z.$$

Hieraus folgt $m = 1$ und $Z = \sin z$, so dass also

$$x = \varphi(z, X) = X \sin z + \cdots.$$

Auf dieselbe Art lässt sich zeigen, dass, wenn statt der Hypotenuse die dem Winkel X anliegende Kathete y gegeben ist, das erste Glied in der Entwickelung von x als Function von X und y in Potenzen nach X $= X \sin y$ ist.

Auf ähnliche Art findet man ferner, dass der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem ein Winkel X und die Hypotenuse z gegeben ist, $= X(1-\cos z)+\cdots$ und, wenn X und die anliegende Kathete y gegeben, der Inhalt ebenfalls $= X(1-\cos y)+\cdots$ ist.

Es sei nun wieder ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC gegeben. Wir lassen den $\angle BAC = X$ um die Grösse $\triangle X = CAD$ wachsen und fällen von B auf AD das Loth BD; AD werde von BC in E, BD von AC in F geschnitten. Der Zuwachs, den der Winkel $CBA = Y$ erleidet (derselbe kann auch negativ sein) sei $= \triangle Y$, die Kathete AC sei $= y$ und $AD = y+\triangle y$, $BC = x$ und $BD = x+\triangle x$.

Der Flächenzuwachs, den das Dreieck ABC hierbei erleidet, lässt sich nun einerseits ausdrücken durch $\triangle X+\triangle Y$ (da $\angle C = \angle D = \frac{1}{2}\pi$); andererseits ist derselbe gleich der Summe der Dreiecke ACE und EBD. Der Inhalt von ACE ist aber dem Vorigen zufolge $= \triangle X(1-\cos y)+\cdots$ und der von $EBD = \triangle Y(1-\cos(x+\triangle x))+\cdots$. Man hat also

$$\triangle X+\triangle Y = \triangle X(1-\cos y)+\cdots+\triangle Y(1-\cos(x+\triangle x))+\cdots,$$

$$\triangle X.\cos y+\cdots+\triangle Y\cos(x+\triangle x)+\cdots = 0$$

oder

$$\cos y+\frac{\triangle Y}{\triangle X}\cos(x+\triangle x)+\cdots = 0.$$

Geht man zur Grenze über, indem man $\triangle X$ verschwindend klein setzt, so erhält man

$$\text{(I.)} \qquad \cos y+\frac{dY}{dX}\cdot\cos x = 0.$$

Ist ferner in dem rechtwinkligen Dreieck ACE der Winkel $E > \frac{1}{2}\pi$, also auch AE und $AC > \frac{1}{2}\pi$, so ist $AE < AC$, also $AD-AE > AD-AC$ oder $ED > \triangle y$; in dem Dreieck AFD ist weiterhin $AF < AD$ oder $y+CF < y+\triangle y$, also $CF < \triangle y$, d. h. $ED > \triangle y > CF$.

Im umgekehrten Falle erhält man $ED < \triangle y < CF$. Es ist aber $ED = \triangle Y\sin(x+\triangle x)+\cdots$, $CF = \triangle Y\sin x+\cdots$. Wird $\triangle X$ wieder verschwindend klein, so erhält man

$$\text{(II.)} \qquad \frac{dy}{dX} = \frac{dY}{dX}\cdot\sin x$$

und ebenso

$$\text{(III.)} \qquad \frac{dx}{dX} = \sin y.$$

Eliminirt man aus (I.) und (II.) $\frac{dY}{dX}$, so ergiebt sich

$$\cos y.\sin x+\cos x\cdot\frac{dy}{dX} = 0$$

und hieraus in Verbindung mit (III.)

$$\cos y.\sin x\cdot\frac{dx}{dX}+\cos x.\sin y\cdot\frac{dy}{dX} = 0.$$

Hiervon ist die Stammgleichung

$$\cos x.\cos y = C.$$

Der Werth der Constanten ergiebt sich, wenn man $x=0$ setzt, in welchem Falle $y=AB$, d. h. = der Hypotenuse z wird. Man hat also

$$\cos x.\cos y = \cos z.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich bekanntlich die ganze sphärische Trigonometrie ableiten. Es ist daher überflüssig, den Gegenstand hier weiter zu verfolgen, und wir wenden uns nunmehr zur imaginären Geometrie oder zur Geometrie der imaginären Hauptfläche.

Dritter Abschnitt.

Zur Geometrie der imaginären Hauptfläche.

1) Wir nehmen im Folgenden eine Hauptfläche an, die unbegrenzt ist und auf welcher die Winkelsumme in dem durch drei Richtlinien gebildeten Dreieck weniger als zwei Rechte beträgt. Dass, wenn in *einem* Dreieck einer Hauptfläche die Winkelsumme kleiner ist als zwei Rechte, dies auch bei jedem anderen Dreieck der Fall ist, haben schon *Lobatschewsky* und *Bolyai* bewiesen, ebenso den weiteren Satz, dass der Flächeninhalt zweier Dreiecke sich verhält, wie die Differenz, die man erhält, wenn man ihre Winkelsumme von zwei Rechten abzieht. Den Fundamentalsatz, von dem man hierbei ausgeht, kann man sogar für alle drei Geometriesysteme, für die Sphärik, für die Euklidische Geometrie und für die imaginäre Geometrie in ganz übereinstimmender Weise beweisen. Ist nämlich ein Dreieck ABC mit der Grundlinie AB gegeben und zieht man durch die Mittelpunkte der Seiten AC und BC eine Richtlinie und durch C eine Linie gleichen Abstandes zu dieser Richtlinie, so haben alle Dreiecke, deren Grundlinie AB ist und deren Spitze auf der durch C gezogenen Linie liegt, gleiche Fläche und gleiche Winkelsumme. Diese Linie gleichen Abstandes

wird in der Sphärik offenbar der Lexellsche Kreis, in der Euklidischen Geometrie wird sie eine Gerade, und der Beweis des allgemeinen Satzes lässt sich ähnlich führen wie in der Euklidischen Geometrie. Aus diesem Satze lässt sich dann der weitere über die Beziehung zwischen Flächeninhalt und Winkelsumme verschiedener Dreiecke derselben Hauptfläche leicht ableiten.

2) Da unseren Voraussetzungen zufolge die Hauptfläche, mit der wir uns jetzt beschäftigen, gekrümmt ist, so bleibt uns noch übrig, den Satz zu beweisen, dass symmetrische Dreiecke, d. h. Dreiecke, die drei für ihre Construction erforderliche und hinreichende Bestimmungsstücke gleich haben, aber in verschiedener Reihenfolge, so dass sie nicht durch Fortbewegung auf der Fläche zur Deckung mit einander gebracht werden können, gleichwohl alle übrigen entsprechenden Stücke gleich haben. Dieser Beweis scheint übrigens auch für die Voraussetzung, von welcher *Bolyai* und *Lobatschewsky* ausgehen, dass im ebenen Dreieck die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte ist, insofern nicht überflüssig, als diese Voraussetzung gleichfalls zu gekrümmten, unendlich ausgedehnten Hauptflächen führt, für welche die Winkelsumme in dem durch Richtlinien gebildeten Dreieck kleiner als zwei Rechte ist: es sind die sogenannten Flächen gleichen Abstandes, deren Punkte von einer gegebenen Ebene gleichen Abstand haben (nach der im I. Abschnitt gegebenen Definition Parallelflächen zur Ebene). Nach jener Hypothese sind solche Flächen gekrümmt, sie sind aber andererseits offenbar Hauptflächen und endlich ist auf ihnen die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte; denn werden durch die drei Seiten AB, BC, CA eines ebenen Dreiecks ABC Ebenen gelegt, senkrecht zur Ebene ABC, so bestimmen dieselben auf der neuen Hauptfläche ein durch Richtlinien derselben gebildetes Dreieck $A'B'C'$, das dieselben Winkel hat wie ABC.

Es sei nun auf einer gekrümmten Hauptfläche ein Dreieck ABC gegeben. Drehen wir die Fläche, während die Punkte A und B fest bleiben, so beschreibt C einen Kreis (denn C kann mit A und B nicht in einer Geraden liegen), und dieser Kreis trifft die Hauptfläche in einem zweiten Punkte C' (denn er kann die Hauptfläche nicht berühren, da er sonst auf der Richtlinie AB liegen müsste wie im I. Abschnitt dargethan wurde). Die neue Lage der Hauptfläche, in welcher C auf C' fällt, hat mit der anfänglichen eine Hauptlinie gemein, die durch die drei Punkte A, B, C' be-

stimmt ist, und dreht man die Fläche wieder in die ursprüngliche Lage zurück, so erhält man eine Hauptlinie, die durch A, B, C geht; die Hauptlinien ABC und ABC' sind einander congruent, sie können zusammenfallen, wenn sie Kreise sind und durch A, B halbirt werden. Da der Bogen AC der Hauptlinie ABC gleich dem Bogen AC' der Hauptlinie ABC' und $BC = BC'$ wird, so sind offenbar auch die Richtlinienstrecken $AC = AC'$, $BC = BC'$. Die beiden Dreiecke ABC und ABC' haben also die zwei Seiten gleich, aber in entgegengesetzter Aufeinanderfolge. Um A beschreibe man nun mit dem Radius AC einen Kreisbogen CC', der die AB in O treffe, und mit BO als Radius beschreibe man um B einen Kreisbogen, der die Hauptlinien ACB in D und $AC'B$ in D' treffe. Die Hauptlinienbogen AC und AC', BD und BD' drehe man nun um A bzw. B so weit, dass sie in O zusammentreffen, dann hat man über AOB zwei dreieckartige, aus Bogen der Hauptlinien ACB und $AC'B$ (AO, BO und ACB, AO, BO und $AC'B$) gebildete Figuren, die nothwendigerweise mit einander zur Deckung gebracht werden können, da die drei Eckpunkte A, O, B dieselben sind für beide und ebenso die Bogen, die zwischen je zweien dieser drei Eckpunkte liegen, congruenten Hauptlinien angehören. Es muss also auch der Kreisbogen $CO = OC'$ und folglich Winkel $CAB = BAC'$ sein. Ebenso findet man, dass je zwei andere entsprechende Winkel der beiden Dreiecke ABC und BAC' einander gleich sind. Hieraus folgen leicht alle Sätze über symmetrische Dreiecke und Vielecke, über gleichschenklige Dreiecke, über die Construction von Senkrechten, Halbirung von Winkeln u. s. w.

3) Wir wenden uns nunmehr der Aufgabe zu, $f(x)$ und $F(x)$ zu bestimmen, wobei wir wieder wie oben mit $f(x)$ den Umfang, mit $F(x)$ den Inhalt des einem Kreise vom Radius x ein- oder umbeschriebenen regulären Vieleckes mit unendlich grosser Seitenzahl bezeichnen. Wir schlagen hierzu denselben Weg ein, wie oben in 3, III., wobei sich nur der eine Unterschied ergiebt, dass für ein Dreieck vom Inhalt J die Winkelsumme $= p-J$ (statt $p+J$) ist. Zur Messung der Winkel nehmen wir dabei einen beliebigen Kreis als Grundkreis an, dessen Radius $= \alpha$ sei, und setzen $f(\alpha) = 2p$.

Wir erhalten so die beiden Gleichungen

$$2pf(x+y) = f(x)(2p+F(y))+f(y)(2p+F(x)),$$
$$2pf(x-y) = f(x)(2p+F(y))-f(y)(2p+F(x))$$

oder, wenn wir $2p+F(x) = 2p\Phi(x)$, $2p+F(y) = 2p\Phi(y)$ setzen,

$$\text{(I.)} \qquad f(x+y) = f(x)\Phi(y)+f(y)\Phi(x),$$
$$\text{(II.)} \qquad f(x-y) = f(x)\Phi(y)-f(y)\Phi(x).$$

Man hat nun auch

$$f(y-x) = f(y)\Phi(x)-f(x)\Phi(y) = -f(x-y)$$

oder

$$f(x) = -f(-x).$$

Setzt man in (I.) statt $x+y$, in (II.) statt $x-y$ jetzt x, so erhält man

$$\text{(III.)} \qquad f(x) = f(x-y)\Phi(y)+f(y)\Phi(x-y),$$
$$\text{(IV.)} \qquad f(x) = f(x+y)\Phi(y)-f(y)\Phi(x+y).$$

Hieraus folgt durch Subtraction

$$[\Phi(x+y)+\Phi(x-y)]f(y) = [f(x+y)-f(x-y)]\Phi(y)$$

oder, da aus (I.) und (II.) durch Subtraction folgt

$$f(x+y)-f(x-y) = 2f(y)\Phi(x),$$
$$[\Phi(x+y)+\Phi(x-y)]f(y) = 2f(y)\Phi(x).\Phi(y)$$

oder

$$\text{(V.)} \qquad \Phi(x+y)+\Phi(x-y) = 2\Phi(x)\Phi(y).$$

Vertauscht man x und y, so hat man

$$\Phi(x+y)+\Phi(y-x) = 2\Phi(x)\Phi(y),$$

also

$$\Phi(x-y) = \Phi(y-x) \quad \text{oder} \quad \Phi(x) = \Phi(-x).$$

Durch Addition von (III.) und (IV.) erhält man

$$2f(x) = [f(x+y)+f(x-y)]\Phi(y)-[\Phi(x+y)-\Phi(x-y)]f(y)$$

oder, da aus (I.) und (II.) folgt

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)\Phi(y),$$
$$2f(x) = 2f(x)\Phi^2(y)-[\Phi(x+y)-\Phi(x-y)]f(y)$$

oder

$$\text{(VI.)} \qquad \Phi(x+y)-\Phi(x-y) = \frac{2f(x)\{\Phi^2(y)-1\}}{f(y)}.$$

Vertauscht man x und y, so bleibt der Ausdruck links unverändert, und man hat daher

$$\frac{f(x)}{f(y)}[\Phi^2(y)-1] = \frac{f(y)}{f(x)}[\Phi^2(x)-1]$$

oder

$$\frac{\Phi^2(y)-1}{f^2(y)} = \frac{\Phi^2(x)-1}{f^2(x)}.$$

Hieraus folgt mit Nothwendigkeit, dass $\frac{\Phi^2(x)-1}{f^2(x)}$ gleich einer Constanten ist; wir setzen daher

$$\Phi^2(x)-1 = f^2(x).$$

Setzt man $f(x) = A\varphi(x)$, so erhält man

$$\text{(VII.)} \qquad \Phi^2(x)-1 = \varphi^2(x).$$

Die oben gefundenen Gleichungen nehmen dabei folgende Gestalt an:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\Phi(y)+\varphi(y)\Phi(x),$$
$$\varphi(x-y) = \varphi(x)\Phi(y)-\varphi(y)\Phi(x),$$
$$\Phi(x+y)+\Phi(x-y) = 2\Phi(x)\Phi(y),$$
$$\Phi(x+y)-\Phi(x-y) = \frac{2\varphi(x)}{\varphi(y)}[\Phi^2(y)-1] = 2\varphi(x)\varphi(y),$$

mithin

$$\Phi(x+y) = \Phi(x)\Phi(y)+\varphi(x)\varphi(y),$$
$$\Phi(x-y) = \Phi(x)\Phi(y)-\varphi(x)\varphi(y).$$

Der Ausdruck $f(x)$ wird offenbar für $x = 0$ ebenfalls $= 0$; andererseits hat man, wie gross oder klein x sein mag, $f(x) > 4x$; der Quotient $\frac{f(x)}{x}$ wird daher für ein verschwindendes x einer bestimmten Constanten gleich und ebenso $\frac{\varphi(x)}{x}$, da $\varphi(x) = f(x):A$. Wir setzen also für ein verschwindendes x $\lim\frac{\Phi(x)}{x} = C$. Ferner ist

$$\frac{\Phi(x-1)}{x} = \frac{\Phi^2(x)-1}{\varphi^2(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\Phi(x+1)}\cdot\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x+1)}\cdot\frac{\varphi(x)}{x},$$

denn der Factor $\frac{\Phi^2(x)-1}{\varphi^2(x)}$ ist nach (VII.) $= 1$. Für ein verschwindendes x erhält man

$$\lim\frac{\Phi(x-1)}{x} = 0.C = 0.$$

Aus den Ausdrücken für $\varphi(x+y)$ und $\Phi(x+y)$ erhält man

$$\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y} = \varphi(x)\frac{\Phi(y-1)}{y}+\Phi(x)\cdot\frac{\varphi(y)}{y},$$

folglich

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = C\Phi(x),$$

$$\frac{\Phi(x+y)-\Phi(x)}{y} = \Phi(x)\cdot\frac{\Phi(y-1)}{y}+\varphi(x)\frac{\varphi(y)}{y},$$

folglich

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = C\varphi(x).$$

Vermöge der Ausdrücke $\varphi(0)=0$, $\Phi(0)=1$ erhält man nun mit Hülfe der *Maclaurin*schen Reihe

$$\varphi(x) = Cx+\frac{C^3x^3}{2.3}+\frac{C^5x^5}{2\ldots5}+\cdots,$$

$$\Phi(x) = 1+\frac{C^2x^2}{2}+\frac{C^4x^4}{2.3.4}+\frac{C^6x^6}{2\ldots6}+\cdots.$$

Die Aehnlichkeit dieser Reihen mit den in der Sphärik gefundenen für $\sin x$ und $\cos x$ leuchtet ein. Setzen wir, um die Aehnlichkeit auch durch die Bezeichnung zum Ausdruck zu bringen, $\mathrm{Sin}\,Cx$ statt $\varphi(x)$ und $\mathrm{Cos}\,Cx$ statt $\Phi(x)$ so haben wir

$$f(x)=A.\mathrm{Sin}\,Cx,\quad F(x)=2p(\mathrm{Cos}\,Cx-1).$$

Für den zunächst beliebig angenommenen Grundkreis haben wir $f(\alpha)=A.\mathrm{Sin}\,C\alpha = 2p$. Wir denken uns jetzt α so bestimmt, dass $C\alpha = 1$, woraus folgt

$$\mathrm{Sin}\,C\alpha+\mathrm{Cos}\,C\alpha = 1+\sqrt{2} = e^{C\alpha},$$

wobei e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes ist. Wir haben daher

$$C\alpha = \log nat(1+\sqrt{2}).$$

Nunmehr wird

$$f(\alpha)=2p=A,\quad f(x)=A\,\mathrm{Sin}\,Cx,\quad F(x)=A(\mathrm{Cos}\,Cx-1).$$

Wie A zu bestimmen ist, wird sich später zeigen.

4) Wir gehen nunmehr über zur Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks. Ganz wie in II., 4 finden wir zunächst, dass, wenn X einer der spitzen Winkel, z die Hypotenuse oder y die anliegende Kathete ist, die dem Winkel X gegenüberliegende Kathete x, in aufsteigenden Potenzen nach X entwickelt, $=X\mathrm{Sin}\,Cz+\cdots$ oder $=X\mathrm{Sin}\,Cy+\cdots$ und ebenso der Inhalt des Dreiecks

$$=X(\mathrm{Cos}\,Cz-1)+\cdots \quad\text{oder}\quad =X(\mathrm{Cos}\,Cy-1)+\cdots.$$

sein muss. Dabei ist der Winkel X ausgedrückt durch den entsprechenden Theil von $f(\alpha)$, wobei $f(\alpha)=2p=A$.

Nehmen wir wiederum wie oben ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC an und bezeichnen den Winkel bei A durch X, den bei B durch Y, die gegenüberliegenden Katheten durch x und y und lassen X um $\triangle X$ wachsen, so erhalten wir für den Flächenzuwachs, den das Dreieck erleidet, einestheils $\triangle J = -(\triangle X + \triangle Y)$ (weil dem Wachsthum der Winkelsumme eine Abnahme des Inhaltes entspricht), anderentheils,

$$\triangle J = \triangle X(\operatorname{Cos} Cy - 1) + \cdots + \triangle Y(\operatorname{Cos} Cx - 1) + \cdots,$$

mithin

$$-\triangle X - \triangle Y = \triangle X(\operatorname{Cos} Cy - 1) + \cdots + \triangle Y(\operatorname{Cos} Cx - 1) + \cdots$$

und hieraus, wenn man zur Grenze für ein verschwindendes $\triangle X$ übergeht:

$$\text{(I.)} \qquad dX . \operatorname{Cos} Cy + dY . \operatorname{Cos} Cx = 0.$$

Ferner erhält man für den Zuwachs, den die Katheten x und y erleiden, indem man zur Grenze übergeht:

$$\text{(II.)} \qquad dy = dY . \operatorname{Sin} Cx,$$

$$\text{(III.)} \qquad dx = dX . \operatorname{Sin} Cy.$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit (I.) folgt

$$\operatorname{Cos} Cy . \operatorname{Sin} Cx . Cdx + \operatorname{Cos} Cx . \operatorname{Sin} Cy . Cdy = 0,$$

wovon die Stammgleichung ist:

$$\operatorname{Cos} Cx . \operatorname{Cos} Cy = \text{Const.}$$

Setzt man $X = 0$, so wird y gleich der Hypotenuse z, also

$$\operatorname{Cos} Cx . \operatorname{Cos} Cy = \operatorname{Cos} Cz.$$

Aus Gleichung (III.) erhält man ferner

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{dx : dX}{\operatorname{Sin} Cy} \\
&= \frac{(dx : dX) \operatorname{Cos} Cx}{\operatorname{Cos} Cx . \operatorname{Sin} Cy} \\
&= \frac{(dx : dX) . \operatorname{Cos} Cx}{\operatorname{Cos} Cx . \sqrt{\operatorname{Cos}^2 Cy - 1}} \\
&= \frac{(dx : dX) . \operatorname{Cos} Cx}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 Cx . \operatorname{Cos}^2 Cy - \operatorname{Cos}^2 Cx}} \\
&= \frac{(dx : dX) \operatorname{Cos} Cx}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 Cz - \operatorname{Cos}^2 Cx}} \\
&= \frac{(dx : dX) . \operatorname{Cos} Cx}{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 Cz - \operatorname{Sin}^2 Cx}} \\
&= \frac{(dx : dX) . \operatorname{Cos} Cx : \operatorname{Sin} Cz}{\sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 Cx : \operatorname{Sin}^2 Cz}}, \\
C &= \frac{(Cdx : dX) . \operatorname{Cos} Cx : \operatorname{Sin} Cz}{\sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 Cx : \operatorname{Sin}^2 Cz}}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\frac{\operatorname{Sin} Cx}{\operatorname{Sin} Cz} = \sin(CX+m).$$

Hierbei ist das Zeichen sin rechts die Abkürzung für den gewöhnlichen cyklischen Sinus.

Die Constante m in dem Ausdrucke rechts bestimmt sich leicht $= 0$. Man hat also

$$\operatorname{Sin} Cx = \operatorname{Sin} Cz . \sin CX,$$

ebenso

$$\operatorname{Sin} Cy = \operatorname{Sin} Cz . \sin CY.$$

Ferner erhält man aus der Gleichung

$$\sin CX = \operatorname{Sin} Cx : \operatorname{Sin} Cz,$$

$$\begin{aligned} \cos CX = \sqrt{1-\sin^2 CX} &= \sqrt{1-\operatorname{Sin}^2 Cx : \operatorname{Sin}^2 Cz} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Sin}^2 Cz - \operatorname{Sin}^2 Cx) : \operatorname{Sin}^2 Cz} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Cos}^2 Cz - \operatorname{Cos}^2 Cx) : \operatorname{Sin}^2 Cz} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Cos}^2 Cx . \operatorname{Cos}^2 Cy - \operatorname{Cos}^2 Cx) : \operatorname{Sin}^2 Cz} \\ &= \operatorname{Cos} Cx \sqrt{(\operatorname{Cos}^2 Cy - 1) : \operatorname{Sin}^2 Cz} \\ &= \operatorname{Cos} Cx . \operatorname{Sin} Cy : \operatorname{Sin} Cz \\ &= \operatorname{Cos} Cx . \sin CY \end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{Cos} Cx = \frac{\cos CX}{\sin CY}.$$

Dies sind die Hauptformeln für das rechtwinklige Dreieck, aus welchen weitere sich leicht ableiten lassen, z. B.

$$\cos CX = \operatorname{Tang} Cy : \operatorname{Tang} Cz,$$

wobei wir durch Tang den Quotienten von Sin und Cos bezeichnen, also

$$\operatorname{Tang} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}, \quad \text{ebenso} \quad \operatorname{Cot} x = \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}.$$

5) Nun setze man $X = \frac{A}{8} = \frac{p}{4}$; dann hat man

$$\operatorname{Sin} Cx = \operatorname{Sin} Cz . \sin \frac{AC}{8}.$$

Legt man an das angenommene rechtwinklige Dreieck ein symmetrisches an, so dass bei X ein rechter Winkel entsteht, so hat man in

dem so entstandenen neuen rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse $= 2x$, die beiden Katheten je $= z$, also

$$\mathrm{Cos}2Cx = \mathrm{Cos}^2 Cz$$

oder

$$\mathrm{Cos}^2 Cx + \mathrm{Sin}^2 Cx = 1 + 2\,\mathrm{Sin}^2 Cx = 1 + \mathrm{Sin}^2 Cz,$$

also

$$2\,\mathrm{Sin}^2 Cx = \mathrm{Sin}^2 Cz$$

oder

$$2\,\mathrm{Sin}^2 Cz . \sin^2 \frac{AC}{8} = \mathrm{Sin}^2 Cz,$$

$$\sin \frac{AC}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\frac{AC}{8} = \frac{\pi}{4}, \quad AC = 2\pi,$$

wobei π die gewöhnliche Bedeutung hat.

Es ist hiernach nur noch eine unbestimmte Grösse vorhanden, nämlich C, wie es auch bei der Kugelfläche der Fall war. Dieselbe kann, wo es sich nicht um Vergleichung verschiedener Hauptflächen, sondern um Gebilde auf einer und derselben Hauptfläche handelt, unbeschadet der Allgemeinheit durch entsprechende Wahl der Längeneinheit willkürlich bestimmt werden; der einfachste Werth ist $C = 1$, in welchem Falle $A = 2\pi$ wird; alsdann wird

$$f(x) = 2\pi\,\mathrm{Sin}\,x, \quad F(x) = 2\pi(\mathrm{Cos}\,x - 1).$$

Der Uebergang zu einer anderen Hauptfläche, für welche $C \lesseqgtr 1$ ist, lässt sich leicht gewinnen.

6) Der Radius des oben angenommenen Grundkreises wird nunmehr $\alpha = \log nat(1+\sqrt{2})$; für denselben ist $f(\alpha) = 2\pi$. Ein anderer Kreis von Bedeutung ist derjenige, für dessen Radius r $\mathrm{Cos}\,r = 2$. Dieser Kreis hat offenbar die Eigenschaft, dass ein Dreieck mit der Winkelsumme $\pi - J$ einem Ausschnitte dieses Kreises mit dem Centriwinkel J flächengleich ist. Man findet für diesen Kreis $r = \log nat(2+\sqrt{3})$.

7) Aus den oben gefundenen Formeln für das rechtwinklige Dreieck lassen sich diejenigen für das schiefwinklige Dreieck leicht ableiten. Werden im Dreieck ABC die Winkel durch α, β, γ, die gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c bezeichnet, so findet man

$$\text{(I.)}\qquad \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma = \mathrm{Sin}\,a:\mathrm{Sin}\,b:\mathrm{Sin}\,c,$$

$$\text{(II.)}\qquad \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b\sin\gamma = \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,c\sin\alpha = \mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Sin}\,a\sin\beta,$$

$$\text{(III.)}\qquad \mathrm{Cos}\,a = \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,c - \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,c\cos\alpha,$$

$$\text{(IV.)}\qquad \mathrm{tang}\,\beta = \frac{\mathrm{Tang}\,b\sin\alpha}{\mathrm{Sin}\,c - \mathrm{Tang}\,b\,\mathrm{Cos}\,c\cos\alpha},$$

$$\text{(V.)}\qquad \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\,\mathrm{Cos}\,a,$$

$$\text{(VI.)}\qquad \mathrm{Tang}\,b = \frac{\mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,c}{\sin\alpha + \mathrm{tang}\,\beta\cos\alpha\,\mathrm{Cos}\,c}.$$

Dies sind die wichtigsten Gleichungen für das schiefwinklige Dreieck, aus denen sich die übrigen wie in der Sphärik leicht ableiten lassen.

8) Sind in einem Viereck $ABCD$ die Winkel bei A, B, C Rechte und bezeichnen wir die Seiten AB, BC, CD, DA der Reihe nach durch a, b, c, d, so findet man leicht folgende Beziehungen zwischen den Gegenseiten:

$$\text{(I.)}\qquad \begin{cases} \mathrm{Tang}\,c = \mathrm{Tang}\,a\,\mathrm{Cos}\,b, \\ \mathrm{Tang}\,d = \mathrm{Tang}\,b\,\mathrm{Cos}\,a, \end{cases}$$

$$\text{(II.)}\qquad \begin{cases} \mathrm{Sin}\,c = \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cos}\,d, \\ \mathrm{Sin}\,d = \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,c. \end{cases}$$

9) Liegen die 3 Punkte A, B, C in einer Richtlinie und ist O ein beliebiger Punkt der Fläche, so erhält man (wie in der Sphärik)

$$\mathrm{Cos}\,OA.\mathrm{Sin}\,BC + \mathrm{Cos}\,OB.\mathrm{Sin}\,CA + \mathrm{Cos}\,OC.\mathrm{Sin}\,AB = 0$$

oder

$$\mathrm{Cos}\,OA.\mathrm{Sin}\,BC + \mathrm{Cos}\,OC.\mathrm{Sin}\,AB = \mathrm{Cos}\,OB.\mathrm{Sin}\,AC.$$

10) Wenn das Dreieck ABC bei A rechtwinklig ist, so hat man

$$\mathrm{Cos}\,AC = \frac{\cos CBA}{\sin ACB}$$

oder

$$\mathrm{Cos}\,AC.\sin ACB = \cos CBA.$$

Es muss daher, damit ein Dreieck möglich ist,

$$\mathrm{Cos}\,AC.\sin ACB < 1 \quad \text{oder} \quad \sin ACB < \frac{1}{\mathrm{Cos}\,AC}$$

sein. Wählt man den Winkel ACB so, dass $\sin ACB = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,AC}$, so wird $\cos CBA = 1$ oder $\angle\, CBA = 0$. In diesem Falle ist also eine Dreiecksbildung nicht mehr möglich. Legt man jedoch an die AC in C einen Winkel ACD von der Grösse, dass $\sin ACD.\mathrm{Cos}\,AC = 1$, so hat die CD die Eigenschaft;

dass sie zwar selbst die AB nie trifft, dass aber jede Richtlinie, die durch C geht und mit AC einen Winkel macht, der $< ACD$, die AB schneidet.

Dieser Winkel ACD in seiner Beziehung zur Strecke AC ist offenbar dasselbe, was *Bolyai* den zu einer Strecke gehörigen *Parallelwinkel* nennt. Auch findet *Bolyai* (*Frischauf*, absolute Geometrie nach *J. Bolyai*, Leipzig, 1872, Seite 39) für den Parallelwinkel $\Pi(h)$, der zur Strecke h gehört, folgende Gleichung

$$1 : \sin \Pi(h) = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{h}{k}} + e^{-\frac{h}{k}}),$$

die mit unserer Gleichung übereinstimmt, wenn man, wie wir gethan, $k = 1$ setzt.

Bolyai und *Lobatschewsky* nennen zwei Richtlinien, die diese Lage (wie AB und CD) zu einander haben, *parallel;* man könnte sie auch *asymptotisch* nennen, da sie sich offenbar unaufhörlich einander nähern, ohne sich zu treffen.

Aus der Gleichung

$$\operatorname{Cos} AC . \sin ACD = 1$$

lassen sich die weiteren Eigenschaften der beiden Richtlinien AB und CD leicht ableiten.

Wählt man auf der CD einen beliebigen Punkt C' und fällt $C'A' \perp AB$, so hat man nothwendig auch $\operatorname{Cos} A'C' . \sin A'C'D = 1$, denn, wäre das Product < 1, so müsste die $C'D$, welche mit CD eins ist, die AB schneiden; wäre das Product > 1, so müsste man durch C' eine Linie ziehen können, $C'D'$, für welche $\operatorname{Cos} A'C' . \text{sie} A'C'D' = 1$. Verbindet man C mit D', so müsste die CD' einerseits, da Winkel $ACD' < ACD$, die AB schneiden, andererseits, da sie bei D' aus dem von $A'C'$ und den Richtlinien $A'B$ und $C'D'$ begrenzten Raum hinaustritt, nicht schneiden.

Ist ferner von A auf die CD die Senkrechte AE gefällt, so hat man auch

$$\operatorname{Cos} AE . \sin BAE = 1,$$

denn

$$\sin BAE = \cos EAC = \operatorname{Tang} AE : \operatorname{Tang} AC,$$

also

$$\operatorname{Cos} AE . \sin BAE = \operatorname{Sin} AE : \operatorname{Tang} AC,$$

aber

$$\operatorname{Sin} AE = \sin ACE . \operatorname{Sin} AC = \operatorname{Tang} AC,$$

folglich

$$\mathrm{Cos}AE.\sin BAE = 1.$$

Es hat also AB dieselbe Lage zu CD wie CD zu AB. Die Construction des Parallelwinkels für eine gegebene Distanz hat schon *Bolyai* gezeigt. Ist AC die gegebene Distanz und $\perp AB$, so errichte man in B das Loth BD und fälle $CD \perp BD$. Nach 8) hat man

$$\mathrm{Sin}CD = \mathrm{Sin}AB.\mathrm{Cos}AC$$

oder

$$1 : \mathrm{Cos}AC = \mathrm{Sin}AB : \mathrm{Sin}CD.$$

Beschreibt man also um B mit dem Halbmesser CD einen Kreisbogen, der die AC in E trifft, so ist

$$\sin AEB = \mathrm{Sin}AB : \mathrm{Sin}CD = 1 : \mathrm{Cos}AC.$$

Es ist also der Winkel AEB der zur Distanz AC gehörige Parallelwinkel.

11) Sind zwei Richtlinien AA' und BB' parallel in dem von *Bolyai* angenommenen Sinne, so kann man, wenn auf der einen ein Punkt A gegeben ist, auf der anderen den Punkt C so bestimmen, dass

$$\angle BAA' = \angle B'BA.$$

Man darf zu diesem Behufe nur in einem beliebigen Punkte auf AA' gegen die BB' hin und auf der BB' gegen die AA' hin je eine Senkrechte errichten und diese beiden einander gleich machen, dann durch deren Endpunkte Linien gleichen Abstandes zu den gegebenen Parallelen AA' und BB' ziehen. Durch den Schnittpunkt dieser Linien gleichen Abstandes wird ein Punkt E bestimmt, der von AA' und BB' gleichen Abstand hat und zur Weiterführung der Construction benutzt werden kann. Ist eine Richtlinie AA' gegeben und auf ihr ein Punkt A und bestimmt man auf allen zu AA' parallelen Richtlinien BB', CC' u. s. w. die Punkte B, C u. s. w. derart, dass $\angle BAA' = B'BA$, $\angle CAA' = C'CA$ u. s. w., so ist der Ort der Punkte B, C u. s. w. eine Linie, die nach *Lobatschewsky Grenzlinie* heisst. Nach der Voraussetzung *Lobatschewskys* ist die Hauptfläche, für welche die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte ist, eine Ebene, die Richtlinien AA', BB' u. s. w. sind also Gerade, die man um zwei ihrer Punkte A, A' oder B, B' u. s. w. drehen kann, ohne dass sie ihre Lage im Raume verändern. Dreht man also den Raum um die Punkte A, A', so beschreibt die Grenzlinie eine Fläche, die *Lobatschewsky* die *Grenzfläche*, *Bolyai* die Fläche F

nennt. Für diese Fläche kann unter der angenommenen Voraussetzung jede der Geraden AA', BB', auch in jeder neuen Lage, die z. B. BB' bei der Drehung um AA' einnimmt, als Axe betrachtet werden. Die Grenzfläche ist also eine *Hauptfläche*. In der That bemerkt auch *Frischauf* (in der angeführten Schrift Seite 30), dass eine Kugel, deren Hauptmesser in's Unbegrenzte wächst, in die Grenzlinie übergeht. *Lobatschewsky* und *Bolyai* weisen auch beide nach, dass für die Grenzfläche die Sätze der Euklidischen Planimetrie gelten, wenn man die Gerade durch die Grenzlinie ersetzt. Ich verweise im übrigen auf die angeführte Schrift von *Frischauf* und auf meine Bemerkungen, die ich im I. Abschnitte über diesen Gegenstand gemacht habe.

12) *Frischauf* stellt in der mehrfach citirten Schrift auch die Gleichungen der Geraden, der Grenzlinie u. s. w. auf. Zur Bestimmung der Punkte auf der Fläche nimmt er eine unbegrenzte Richtlinie XX' und auf ihr einen bestimmten Punkt O als Anfang an. Fällt man von einem Punkte P die Senkrechte $PP' \perp OX'$ und setzt $PP' = y$, $OP' = x$, wobei x positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem P' auf der einen oder der anderen Seite von P liegt und ebenso y positiv oder negativ, je nachdem es auf der einen oder der anderen Seite von XX' liegt, so ist durch x und y die Lage von P unzweideutig bestimmt. Durch eine Gleichung zwischen x und y, wobei y eine stetige Function von x ist, ist eine Linie auf der Fläche bestimmt. Für die *Richtlinie* gelangt *Frischauf*, indem er von der Eigenschaft ausgeht, dass die Richtlinie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, mit Hülfe der Variationsrechnung zu folgender Endgleichung:

$$\left(e^{\frac{y}{k}} + e^{-\frac{y}{k}}\right)\left(ae^{\frac{x}{k}} + be^{-\frac{x}{k}}\right) = 2\left(e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}}\right)$$

oder, wenn wir $k = 1$ setzen und die von uns gewählten Bezeichnungen anwenden:

$$2\,\mathrm{Cos}\,y\,[a(\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Sin}\,x) + b(\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x)] = 4\,\mathrm{Sin}\,y.$$

Wir gelangen auf einfacherem Wege zu einer *einfacheren Gleichung*, die übrigens, wie man sich leicht überzeugen wird, mit der vorstehenden übereinstimmt. Wir wählen ein *rechtwinkliges Coordinatensystem* $OX \perp OY$. Fällt man von einem gegebenen Punkte P die Lothe $PP' \perp OX$, $PP'' \perp OY$, so setzen wir $OP' = x$, $OP'' = y$, wobei für die Vorzeichen von x und y das Gleiche gilt wie oben. Dabei ist zu bemerken, dass zwar zu einem gegebenen Punkte P ein bestimmtes Werthpaar x und y gehört, aber nicht

auch zu jedem gegebenen Werthpaar x und y ein (realer) Punkt P. Es muss vielmehr, wie man leicht findet, der absolute Werth von $\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y < 1$ sein, damit die beiden in P' und P'' auf OX und OY errichteten Lothe sich treffen. Wird $\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y = \pm 1$, so sind diese Lothe einander parallel im Sinne von *Lobatschewsky* und *Bolyai*. Denn bezeichnet man den Parallelwinkel von x mit α und den von y mit β, so hat man $\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos} x}$, $\cos\alpha = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Sin} x}$, ebenso $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{Sin} y}$. Wenn also $\operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y = 1$, so ist $\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = 1$ oder $\alpha + \beta = R$. Die beiden Lothe sind also in diesem Falle parallel einer durch O gehenden Richtlinie, welche die Winkel α und β mit den Coordinatenaxen macht. Zum gleichen Ergebniss gelangt man durch Betrachtung des Dreieckes $P'PP''$, von welchem $P'P''$ und die Winkel P' und P'' gegeben sind, da sie sich aus den für die Bestimmung des Dreieckes $OP'P''$ hinreichenden Stücken x und y leicht berechnen lassen.

Nun sei eine Richtlinie gegeben, welche die Axe OX in A und OY in B schneidet, OA sei $= a$, $OB = b$ gesetzt; P sei ein beliebiger Punkt dieser Richtlinie. Dann erhält man für das Dreieck OAP nach der Formel 7) (VI.)

$$\operatorname{Tang} OP(\sin AOP + \operatorname{tang} PAO . \cos AOP \operatorname{Cos} a) = \operatorname{tang} PAO . \operatorname{Sin} a.$$

Im rechtwinkligen Dreieck OAB hat man aber

$$\operatorname{tang} BAO = \operatorname{tang} PAO = \frac{\operatorname{Tang} b}{\operatorname{Sin} a}.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{Tang} OP\left(\sin AOP + \frac{\operatorname{Tang} b}{\operatorname{Sin} a} \cdot \cos AOP . \operatorname{Cos} a\right) = \operatorname{Tang} b$$

oder

$$\operatorname{Tang} OP\left(\sin AOP + \frac{\operatorname{Tang} b}{\operatorname{Tang} a} \cdot \cos AOP\right) = \operatorname{Tang} b$$

oder

$$\frac{\operatorname{Tang} OP \sin AOP}{\operatorname{Tang} b} + \frac{\operatorname{Tang} OP \cos AOP}{\operatorname{Tang} a} = 1.$$

Es ist aber

$$\operatorname{Tang} OP . \sin AOP = \operatorname{Tang} y,$$
$$\operatorname{Tang} OP . \cos OAP = \operatorname{Tang} x,$$

man hat daher

$$\frac{\operatorname{Tang} x}{\operatorname{Tang} a} + \frac{\operatorname{Tang} y}{\operatorname{Tang} b} = 1.$$

In *Polarcoordinaten* erhält man, wenn man $OP = r$, $\angle AOP = \varphi$ setzt,

$$\frac{\mathrm{Tang}\,r\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Tang}\,a} + \frac{\mathrm{Tang}\,r\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Tang}\,b} = 1.$$

Fällt man von O auf die Richtlinie AB eine Senkrechte OM, nimmt auf dieser einen Punkt M' nach Belieben an und legt zu OM' durch M' eine Senkrechte $M'Q$, so hat man, wenn OQ gezogen wird, welche AB in P schneidet, und $QQ_1 \perp OX$, $QQ_{11} \perp OY$ gelegt wird:

$$\mathrm{Tang}\,OQ_1 : \mathrm{Tang}\,OP_1 = \mathrm{Tang}\,OQ : \mathrm{Tang}\,OP,$$
$$\mathrm{Tang}\,OQ_{11} : \mathrm{Tang}\,OP_{11} = \mathrm{Tang}\,OQ : \mathrm{Tang}\,OP,$$

ferner

$$\mathrm{Tang}\,OQ : \mathrm{Tang}\,OP = \mathrm{Tang}\,OM' : \mathrm{Tang}\,OM.$$

Man erhält daraus

$$\frac{\mathrm{Tang}\,OQ_1}{\mathrm{Tang}\,a} + \frac{\mathrm{Tang}\,OQ_{11}}{\mathrm{Tang}\,b} = \frac{\mathrm{Tang}\,OM'}{\mathrm{Tang}\,OM}.$$

Sind also zwei Richtlinien senkrecht zu einer und derselben durch den Coordinatenanfang O gehenden Richtlinie, so haben für die Gleichungen derselben, wenn sie auf die Normalform

$$\frac{\mathrm{Tang}\,x}{a} + \frac{\mathrm{Tang}\,y}{b} = 1$$

gebracht werden, die Coefficienten $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ dasselbe Verhältniss.

Man kann die Gleichung der Richtlinie auch auf folgendem Wege ableiten:

Zufolge 9) erhält man, wenn wieder die gegebene Richtlinie die Axe OX in A, OY in B schneidet und P ein Punkt auf ihr ist,

$$\mathrm{Cos}\,OP.\mathrm{Sin}\,AB = \mathrm{Cos}\,OA.\mathrm{Sin}\,PB : \mathrm{Cos}\,OB.\mathrm{Sin}\,AP.$$

Es ist aber

$$\mathrm{Sin}\,AP = \mathrm{Sin}\,PP_1 : \sin BAO$$
$$= \mathrm{Sin}\,PP_1 : \frac{\mathrm{Sin}\,BO}{\mathrm{Sin}\,AB} = \frac{\mathrm{Sin}\,PP_1.\mathrm{Sin}\,AB}{\mathrm{Sin}\,BO},$$

ebenso

$$\mathrm{Sin}\,PB = \mathrm{Sin}\,PP_{11} : \frac{\mathrm{Sin}\,AO}{\mathrm{Sin}\,AB} = \frac{\mathrm{Sin}\,PP_{11}.\mathrm{Sin}\,AB}{\mathrm{Sin}\,AO},$$

folglich

$$\mathrm{Cos}\,OP = \frac{\mathrm{Sin}\,PP_{11}.\mathrm{Cos}\,OA}{\mathrm{Sin}\,AO} + \frac{\mathrm{Sin}\,PP_1.\mathrm{Cos}\,OB}{\mathrm{Sin}\,BO},$$

$$\mathrm{Cos}\,OP = \frac{\mathrm{Sin}\,PP_{11}}{\mathrm{Tang}\,AO} + \frac{\mathrm{Sin}\,PP_1}{\mathrm{Tang}\,OB} = \frac{\mathrm{Sin}\,P_{11}P}{\mathrm{Tang}\,OA} + \frac{\mathrm{Sin}\,P_1P}{\mathrm{Tang}\,OB}.$$

Nach 8) (II.) hat man ferner

$$\mathrm{Sin}\,P_{11}P = \mathrm{Sin}\,OP_1.\mathrm{Cos}\,PP_1 = \mathrm{Tang}\,OP_1.\mathrm{Cos}\,OP,$$

$$\mathrm{Sin}\,P_1P = \mathrm{Sin}\,OP_{11}.\mathrm{Cos}\,P_{11}P = \mathrm{Tang}\,OP_{11}.\mathrm{Cos}\,OP.$$

Daraus folgt endlich

$$1 = \frac{\mathrm{Tang}\,OP_1}{\mathrm{Tang}\,OA} + \frac{\mathrm{Tang}\,OP_{11}}{\mathrm{Tang}\,OB}$$

$$= \frac{\mathrm{Tang}\,x}{\mathrm{Tang}\,a} + \frac{\mathrm{Tang}\,y}{\mathrm{Tang}\,b}.$$

Aus der allgemeinen Form

$$\frac{\mathrm{Tang}\,x}{a} + \frac{\mathrm{Tang}\,y}{b} = 1$$

lässt sich, was einen weiteren Vorzug dieser Gleichung bietet, sofort erkennen, ob die Richtlinie die eine der beiden Axen oder beide schneidet oder nicht schneidet. Damit sie die Axe OX schneidet, muss für $y = 0$ ein reeller Werth von x sich ergeben. Man hat dabei

$$\mathrm{Tang}\,x = a.$$

Damit also x reell wird, muss $a^2 < 1$ sein. Ebenso muss, wenn die Richtlinie die Axe OY schneiden soll, $b^2 < 1$ sein.

Ist $a^2 = 1$, so ist die Richtlinie der Axe OX parallel im Sinne von *Bolyai.*

Ist $b^2 = 1$, so ist die Richtlinie der Axe OY parallel.

Anm. Wenn wieder $PP_1 \perp OX$ und $PP_{11} \perp OY$, wobei $OX \perp OY$, so können wir als Coordinaten von P statt der Strecken OP_1 und OP_{11} auch die (hyperbolischen) Tangenten derselben annehmen; dann nimmt die Gleichung der Richtlinie die Form an

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

die völlig übereinstimmt mit der Gleichung der Geraden in der Euklidischen Geometrie.

13) Behält man die oben gewählte Bezeichnung der Coordinaten bei, so lässt sich ohne Schwierigkeit zeigen, dass, wenn irgend eine Glei-

chung beliebigen Grades zwischen Tang$x$ und Tang$y$ gegeben ist, der Grad derselben sich nicht ändert, wenn man von dem gegebenen zu einem beliebigen anderen rechtwinkligen Coordinatensystem übergeht. Wir halten uns jedoch damit nicht länger auf und bemerken nur noch, dass z. B. die Curve zweiten Grades

$$\frac{\operatorname{Tang}^2 x}{\operatorname{Tang}^2 a} + \frac{\operatorname{Tang}^2 y}{\operatorname{Tang}^2 b} = 1 \qquad (a > b)$$

die Eigenschaft hat, dass für jeden ihrer Punkte P die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F und F_1 constant ist: $PF + PF_1 = 2a$.

Wählt man die Linie FF_1 (die Hauptaxe) als Nulllinie und F als Anfangspunkt für Polarcoordinaten, so erhält man für die Curve, die man analog der Bezeichnung der Euklidischen Geometrie *Ellipse* nennen kann, wenn P ein Punkt derselben ist:

$$\operatorname{Tang} FP = \frac{\operatorname{Tang}^2 b : \operatorname{Tang} a}{1 + \operatorname{Cos}\varphi \cdot \frac{\operatorname{Sin} 2c}{\operatorname{Sin} 2a}},$$

wobei $2c = FF_1$ und φ den Winkel bedeutet, welchen der Strahl FP mit der Nulllinie macht. Setzt man also

$$\operatorname{Tang}^2 b : \operatorname{Tang} a = \operatorname{Tang} p, \quad \frac{\operatorname{Sin} 2c}{\operatorname{Sin} 2a} = e,$$

so hat man

$$\operatorname{Tang} FP = \frac{\operatorname{Tang} p}{1 + e \cos\varphi}.$$

Zwei *Linien gleichen Abstandes*, die zu einer Richtlinie symmetrisch liegen, bilden zusammen eine Curve zweiten Grades, deren Gleichung ist

$$\operatorname{Tang}^2 x + \frac{\operatorname{Tang}^2 y}{\operatorname{Tang}^2 b} = 1.$$

wobei b der halbe Abstand der beiden Linien ist. Die Hauptaxe ist die Richtlinie selbst, die Brennpunkte liegen im Unendlichen.

Aehnliche Gleichungen erhält man für die Linie, für welche die Differenz der Entfernungen ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten F und F_1 eine gegebene Grösse $2a$ hat (für die *Hyperbel*). Ist wieder $FF_1 = 2c$ und wählt man FF_1 als die eine Axe des Coordinatensystemes und den Mittelpunkt von FF_1 als Anfang der Coordinaten, so erhält man für senkrechte Coordinaten

$$\frac{\operatorname{Tang}^2 x}{\operatorname{Tang}^2 a} - \frac{\operatorname{Tang}^2 y . \operatorname{Cos}^2 a}{\operatorname{Cos}^2 c - \operatorname{Cos}^2 a} = 1.$$

Diese Gleichung stimmt ganz mit der oben gefundenen (für die Ellipse) überein; der einzige Unterschied ist, dass hier $c > a$ und dort $c < a$.

Nimmt man eine Linie b an von der Art, dass $\mathrm{Cos}\, a\, \mathrm{Cos}\, b = \mathrm{Cos}\, c$, so geht die Gleichung für die Hyperbel über in folgende:

$$\frac{\mathrm{Tang}^2 x}{\mathrm{Tang}^2 a} - \frac{\mathrm{Tang}^2 y}{\mathrm{Sin}^2 b} = 1.$$

In Polarcoordinaten erhält man, wenn FF_1 die Nulllinie und F der Anfangspunkt ist, für die Hyperbel die Gleichung

$$\mathrm{Tang}\, r = \frac{\mathrm{Tang}\, p}{1 + e\, \mathrm{Cos}\, \varphi},$$

wobei $e = \frac{\mathrm{Sin}\, 2c}{\mathrm{Sin}\, 2a}$ und p die senkrechte Ordinate der Curve im Punkte F ist, ganz wie bei der Ellipse.

14) Aus den bisher gefundenen Gleichungen geht hervor, dass man auch das System der Liniencoordinaten auf unsere Hauptfläche anwenden kann. Ebenso lassen sich Punkte und Linien auf ein Coordinatendreieck ähnlich wie in der analytischen Geometrie der Euklidischen Ebene beziehen. Da sich endlich auch für die imaginäre Hauptfläche durch einfache metrische Relationen der Satz beweisen lässt, dass, wenn auf einer Richtlinie drei Punkte angenommen werden, wovon zwei die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten eines Viereckes sind, während die eine Diagonale des Viereckes durch den dritten Punkt geht, die andere Diagonale die gegebene Richtlinie in einem bestimmten vierten Punkte trifft, (wie immer im Uebrigen das Viereck gewählt wird) so lassen sich auch die Sätze von der projectiven Verwandtschaft von Punktreihen und Strahlenbüscheln, die aus der Geometrie der Lage bekannt sind, auf unsere Fläche übertragen. Doch gehe ich darauf nicht näher ein, da es mir hier nur darum zu thun war, die Elemente der imaginären Geometrie auf einem neuen Wege zu entwickeln.

STORAGE AREA

